

L'aportació de Tomàs Cerdà en la introducció del càlcul diferencial i integral a l'Espanya del segle XVIII

JOAQUIM BERENGUER CLARIÀ

Treball dirigit per **M^a ROSA MASSA ESTEVE**, Professora Agregada d'Història de la Ciència. Departament de Matemàtica Aplicada I. UPC

Tutor: **AGUSTÍ NIETO GALÁN**

Màster interuniversitari (UAB-UB)

Història de la Ciència: Ciència, Història i Societat

Barcelona, 21 de juliol de 2011

RESUM

El desenvolupament del càlcul diferencial i integral com a disciplina científica a Europa durant el segle XVIII no és un tema nou. Però s'ha acostumat a enfocar la visió d'aquesta formació molt sovint des del “centre” i a partir de les grans figures com Isaac Newton o Gottfried Wilhelm Leibniz. En el present treball el protagonista potser, per a molts, no és una figura de primera línia; Tomàs Cerdà, és un ensenyant a Barcelona i a Madrid durant la segona meitat del segle XVIII, que “tradueix” al castellà autors anglesos, però que amb la seva pràctica està realment introduint el nou càlcul a Espanya i donant, de fet, una orientació d'aquesta nova disciplina als seus deixebles. El com i per què Cerdà decideix quin serà el seu guia en la introducció del càlcul diferencial i integral i quines seran les seves pròpies aportacions en aquesta labor seran els temes centrals del nostre treball. La nostra tasca ha anat, així doncs, a entendre millor, el procés de divulgació del coneixement científic, veient-lo en tot moment com formant part activa del mateix procés de construcció d'aquest coneixement.

ABSTRACT

The development of Differential and Integral Calculus in the eighteenth century in Europe as a scientific discipline is not a new topic. But it has often used to focus the view of this topic from the “centre” and from the well known scientists as Isaac Newton or Gottfried Wilhelm Leibniz. The main character in this project maybe, for many people, is not a well known figure; Tomàs Cerdà is a teacher in Barcelona and in Madrid during the last half of the eighteenth century, who “translates” English authors to Spanish, but, with his practice, he is really introducing the new Calculus in Spain and giving orientation on this new discipline to his disciples. The main topics of our paper will be how and why Cerdà decides who will be his guide on the introduction of Differential and Integral Calculus and which will be his own contributions in this work. Then, our task has focused on a better understanding of popularisation process of scientific knowledge, always in a way where this one is an active part of the building process of this knowledge.

Índex

1. Introducció	1
2. La introducció del càlcul diferencial a Espanya a l'època de Cerdà.....	5
2.1. La situació de la ciència i el seu ensenyament a Espanya de mitjans de segle XVIII	5
2.2. La situació del càlcul diferencial a Espanya a mitjans del segle XVIII	7
3. Tomàs Cerdà : un home dedicat a l'ensenyament	13
4. El llibre de Thomas Simpson publicat al 1750 : <i>The Doctrine and Application of Fluxions</i>	17
5. Els manuscrits de Cerdà que fan referència al Tractat sobre fluxions	19
6. Anàlisi comparatiu dels manuscrits de Cerdà amb el llibre de Simpson i amb altres textos de l'Espanya de l'època.....	21
6.1. Els continguts teòrics generals	23
6.2. Les definicions generals	28
6.3. La notació	37
6.4. “Resuélvanse por las Fluxiones algunos Problemas de Máximos y Mínimos” ...	39
6.5. “Explicase el método de tirar las tangentes a las curvas por medio de las fluxiones”	42
7. Conclusion.....	46
8. Agraïments	50
9. Fonts i bibliografia	51
10. Apèndix.....	58

1. Introducció

El treball que presentem gira al voltant d'un ensenyant, matemàtic, jesuïta, català, del segle XVIII, Tomàs Cerdà (1715-1791). Concretament volem centrar-nos en el paper que aquest personatge va jugar en la introducció del càlcul diferencial i integral en el nostre país. Cal reconèixer que la lectura del treball de recerca de Lluís Gassiot, dirigit per Manuel Garcia Doncel al 1996, en el marc del CEHIC de la UAB¹, al voltant del "Tratado de Astronomia" d'aquest matemàtic ens va predisposar molt favorablement a l'estudi del personatge i de la seva obra. L'ànim de la M^a Rosa Massa va ser l'altre factor determinant per acabar de decidir-nos a iniciar la nostra recerca.

Els objectius del nostre treball es van anar perfilant a mesura que avançava aquesta recerca. La primera obra de Cerdà que vam tenir entre les mans va ser *Liciones de Mathemática o Elementos Generales de Arithmética y Algebra para el uso de la clase. Tomo Primero*, publicada a Barcelona al 1758. Un llibre, com indica el seu títol, per als seus alumnes, que en aquell moment eren els del Col·legi de Cordelles de Barcelona. En el seu pròleg podem llegir tota una defensa de la necessitat del llibre de text i una promesa de continuar publicant altres manuals. Concretament, en aquest pròleg, Cerdà parla de la futura aparició de la "*Geometria, y Trigonometria, la Aplicacion de la Algebra à Geometria, y Curvas, el Methodo Directo, è Inverso de las Fluxiones*, que otros llaman *Calculo Diferencial, è Integral*."² Efectivament Cerdà va publicar posteriorment el manual de geometria però el tractat sobre l'aplicació de l'àlgebra a la geometria i el del càlcul diferencial i integral no van arribar a publicar-se mai.

Norberto Cuesta Dutari, que és un dels primers historiadors que van analitzar a fons la figura de Cerdà, al 1985, en el seu llibre *Historia de la Invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*³, ens explica que a l'any 1973, Eulogio Hernández Alonso va descobrir uns manuscrits de Cerdà a la Academia de la Historia de Madrid i entre aquests manuscrits va descobrir dues versions del que probablement havia de ser el seu *Tratado de Fluxiones*. La conclusió d'Hernández Alonso va ser que els manuscrits de Cerdà eren una simple traducció del llibre de Thomas Simpson (1710-

¹ Gassiot Matas (1996).

² Cerdà (1758) ; "A la Juventud Española".

³ Cuesta Dutari (1985); pp. 250-253.

1761) : *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750)⁴ i va abandonar el seu treball⁵ sense publicar cap resultat de la seva recerca.

Alguns anys després del descobriment dels manuscrits de Cerdà, Lluís Gassiot Matas va reprendre la pista dels manuscrits i va descobrir el “Tratado de Astronomia” de Cerdà, com ja hem citat. En el seu treball de recerca , al 1995, Gassiot posa de relleu una carta de Cerdà a Simpson⁶, on el matemàtic català diu que publicarà un tractat sobre fluxions.

La història de Cerdà, amb uns manuscrits que no van arribar-se a publicar mai, tractant del càlcul diferencial i integral, un camp gens conegut a Espanya en aquell moment i, per molts historiadors, un dels més representatius de la “modernitat” d’un país, ens van interessar des del primer moment. Ens va interessar conèixer per què Cerdà va prendre com a model un llibre de Simpson i fins a quin punt només en va fer una simple traducció, com es diu en el llibre de Cuesta Dutari.

Citem les paraules de Santiago Garma, en el seu article “Producción matemática a fines del siglo XVIII”, al 1978, oposant-se a l’opinió de Sánchez Pérez sobre l’obra de Cerdà de que “no influye en el progreso de la ciencia en nada original...”, que ens van acabar d’animar a iniciar el treball que ara presentem: “Esto supone en Sánchez Pérez un concepto muy particular del progreso de la ciencia, pues parece desprenderse de sus palabras que el progreso de la ciencia se debe exclusivamente a las aportaciones originales, cuando los trabajos de recopilación y de formalización son parte del progreso de la ciencia.”⁷

Posteriorment les aportacions d’historiadors de la ciència contemporanis en la línia oberta per James Secord⁸, entre d’altres, i particularment les aportacions de grups com STEP (Science and Technology in the European Periphery), on queda qüestionada la imatge tradicional de la producció del coneixement exclusivament en mans dels “grans inventors” i es posa l’èmfasi en la comunicació del coneixement científic com a nucli vertebrador del procés de la producció d’aquest, ens han confirmat la necessitat de rescatar la figura de Cerdà. I aquest rescat, que pretén acabar amb la falsa jerarquització “descobridor-divulgador” i donar a Cerdà el paper d’actor de primera línia en el

⁴ De fet la primera publicació de *New Treatise on Fluxions* de Thomas Simpson és del 1737. La del 1750 és una reedició reformada.

⁵ Hernández Alonso (1985).

⁶ Cerdà, Tomàs, *Carta de Cerdà a Simpson*. Barcelona 1758. RAH, Cortes 9/2892. Aquesta carta també va ser descoberta per Hernández Alonso.

⁷ Garma Pons (1978); p 440.

⁸ Secord (2004).

desenvolupament científic del moment, de fet, ha estat un dels primers objectius del nostre treball.

Creiem que resulta particularment interessant analitzar l'obra de Cerdà, i, en el nostre cas concret, allò que fa referència al càlcul diferencial, trencant amb la imatge de l'ensenyant com a simple transmissor de coneixements o simple traductor d'un autor estranger. Cal analitzar la seva obra, preguntant-se a qui anava dirigida, quines van ser les seves opcions, el per què d'aquestes opcions.

Hem concretat els nostres objectius en l'anàlisi comparativa entre els escrits de Cerdà sobre càlcul diferencial i el llibre de Simpson citat. I aquest ha estat el nostre segon gran objectiu: descobrir quin era la principal motivació de Cerdà escrivint els seus manuscrits, esbrinar com Cerdà "adapta" l'obra del matemàtic anglès en aquests manuscrits i les raons que té per fer-ho d'una determinada manera.

Està clar que ens hem trobat, durant la nostra recerca, amb línies d'investigació que s'entrecruaven amb la nostra, com la del paper jugat pels jesuïtes com a transmissors de coneixements científics durant els segles XVII i XVIII a Europa, la de l'ensenyament de les matemàtiques al segle XVIII a Espanya, i en particular a Barcelona o la de la història del llibre de text a Espanya. Però ha calgut focalitzar la nostra atenció al voltant dels manuscrits de Cerdà que tracten sobre fluxions i la seva relació amb l'obra de Simpson.

Com és natural, el nostre estudi ha partit de tot el treball anterior que altres historiadors havien iniciat al voltant de la figura de Cerdà. Tant Cuesta Dutari com Garma, estudiosos del nostre personatge, citen a Juan Sempere Guarinos (1785-1789) com el primer historiador a finals del segle XVIII que parla de Cerdà. De la seva obra *Liciones de Matemática o Elementos Generales de Arithmética y Algebra para el uso de la clase*, Sempere recull l'opinió del Journal Étranger (1760) de Paris que diu : "Aunque no lleva más título que el de Elementos, se encuentran en ella muchas cosas tratadas más profundamente que en los libros ordinarios de este género".⁹

A més dels citats, altres historiadors han contribuït en l'estudi de Cerdà¹⁰, però això no ens ha impedit pensar que la nostra aportació podia ser vàlida i útil per millor entendre de quina manera es produeix l'apropiació d'una nova disciplina científica, com és el càlcul diferencial, en l'Espanya de mitjans de segle XVIII.

⁹ Cuesta Dutari (1985); p. 240.

¹⁰ Udías (2005), (2010). Ausejo (2010).

L'estructura del nostre treball gira, per tant, al voltant de la comparació de dos textos: els manuscrits de Cerdà relatius al seu *Tratado de fluxiones* i el llibre de Simpson: *The Doctrine and Application of Fluxions*. Per poder treure'n conclusions d'aquesta comparació, en primer lloc ha calgut un estudi general de cada un dels textos, després els hem comparat a nivell dels continguts i finalment hem escomès una comparació més detallada que fixava l'atenció en determinats capítols o parts de cada un dels textos. Especialment ens hem centrat en el discurs – en com varia d'un text a l'altre – en el desenvolupament de les demostracions i en la notació utilitzada. Naturalment per poder copsar del tot la labor de Cerdà, prèviament al nucli central del nostre treball, hem elaborat una part introductòria que amb una anàlisi de la situació de la ciència del moment, en particular de les matemàtiques a l'Espanya del segle XVIII que inclou una anàlisi de l'evolució del càlcul diferencial a Europa durant aquell segle. Ha calgut també una presentació del personatge : de la seva obra i de la seva pràctica. Creiem que la nostra tasca d'un estudi comparatiu entre l'obra de Simpson i la de Cerdà no ha fet més que començar ja que hem pogut analitzar a fons només una part d'aquesta.

Resumint, el nostre treball consta esquemàticament de tres parts:

- ✓ Primera part : Breu anàlisi del context específicament matemàtic del càlcul diferencial a Espanya i a Europa, en el que es mou Cerdà, així com del context professional i social del mateix personatge (Capítols 2 i 3).
- ✓ Segona part : L'anàlisi comparativa dels textos de Cerdà sobre fluxions i el llibre *The Doctrine and Application of Fluxions* de Simpson (Capítols 4, 5, 6).
- ✓ Tercera part : Les nostres pròpies conclusions sobre l'aportació de Cerdà al càlcul diferencial (Capítol 7).

Degut a que la nostra eina de treball bàsica han estat els manuscrits de Cerdà i el llibre citat de Simpson hem vist la necessitat de complementar el nostre treball amb un apèndix per tal de reproduir algunes parts de les fonts primàries utilitzades.

Les conclusions que n'hem tret giren al voltant de l'esforç per part de Cerdà per fer el més pedagògica possible la introducció del càlcul diferencial i integral en els centres on va impartir docència.

2. La introducció del càlcul diferencial a Espanya a l'època de Cerdà

2.1. La situació de la ciència i el seu ensenyament a Espanya de mitjans de segle XVIII

L'Espanya del segle XVIII es caracteritza pel manteniment d'un sistema econòmic i social que els historiadors han denominat Antic Règim. És a dir Espanya continua sent una societat basada en una economia rural i senyorial i basada en la jerarquitització social.

A partir d' un cert desenvolupament del comerç i de noves indústries manufactureres es produeix un increment de la burgesia i els artesans. I aquest lleuger canvi en l'estructura econòmica i social potencia que alguns intents reformistes comencin a manifestar-se en certs sectors d'Espanya a finals del segle XVII. Però és amb l'arribada dels Borbons que es produeix un moviment reformador més fort. De totes formes aquest moviment s'ha d'enfrontar, per una banda, a l'immobilisme i a la tradició i, per una altra, a les classes polítiques i socials dominants que es resisteixen a perdre els seus privilegis.

L'Espanya política del segle XVIII cal entendre-la a partir de la Guerra de Successió que dona el poder als Borbons, després d'una llarga dominació dels Austrias. Això significa un nou equilibri del poder polític a nivell europeu i un reforçament de la centralització d'aquest poder a Espanya.

L'Estat del despotisme il·lustrat significa el triomf del racionalisme centralista, sota el qual es produeix l'aliança entre els reformistes i els defensors de la sobirania il·limitada del monarca amb la idea d'aconseguir governs forts per tal de “modernitzar” el país des dalt.

Catalunya, un cop reforçat el centralisme castellà, cal veure-la en el mateix context. Tot i així degut al major dinamisme de les noves classes burgeses i artesanals, sobre tot a partir de la segona meitat del segle, les institucions relacionades amb les noves arts i amb el comerç sorgiran amb més força.

Tal com assenyalen diversos historiadors¹¹, durant aquest segle, apareixen diferents institucions que d'una manera o altra estan relacionades amb la ciència al marge d'unes universitats reticents als nous corrents científics. Es tracta de La Sociedad Bascongada de Amigos del País o de La Conferencia Físico-matemática Experimental de Barcelona o de Los Reales Seminarios de Nobles Madrid i també de Las Academias de Artilleria de Ocaña i Segovia, de La Real Academia de Mathematicas en el cuartel de Guardias de Corps, de Las Escuelas de Guardias-Marinas de Málaga i Cádiz o de La Reial Academia Militar de Mathematicas de Barcelona, entre altres.

Molts altres historiadors han analitzat¹² el paper particularment important que van jugar els jesuïtes en l'impuls de la ciència en aquestes institucions. Concretament Victor Navarro Brotóns, en els seus articles, analitza el paper jugat pels jesuïtes en la tasca de divulgació de la ciència que en aquells moments prenia força arreu d'Europa. Una de les raons d'aquest paper, segons ell, és el contacte amb els jesuïtes europeus i el cert eclecticisme propi de la Companyia que donava una certa base pel desenvolupament científic de la Il·lustració. Efectivament, a partir del segle XVIII, es fomenta la política d'enviar a fóra membres de la Companyia, de la qual cosa n'és un bon exemple en Cerdà. Sobre els jesuïtes i les matemàtiques Antonella Romano (1999) n'ha fet un estudi exhaustiu.

De la mateixa manera, les institucions militars van jugar un paper essencial en la difusió especialment de les matemàtiques, tema que també ha estat estudiat per diversos historiadors¹³.

Un estudi més específic de les matemàtiques del segle XVIII l'ha fet Santiago Garma en diferents articles¹⁴, situant a Cerdà dins del grup de matemàtics dedicats a l'ensenyament, al costat de Benito Bails (1730-1797), Antonio Ximeno (1729-1808) i de Juan Justo García (1752-1830). Garma diferencia aquest grup del grup de militars

¹¹ Com Antonio Lafuente i José Luis Peset.

¹² Navarro (1977). Navarro (2001). Navarro (2003). Navarro; Puig (2004-2007). García Doncel; Martínez Vidal; Nieto-Galan; Pardo Tomàs (2004-2007). García-Doncel; Gassiot (2000). Udías (2005). Udías (2010).

¹³ Capel (2004-2007). Capel; Sánchez; Moncada (1988). Roca (2007). Massa (2006). De Mora; Massa (2010). Cal ressenyar la investigació sobre el tema portada dins el grup de recerca d'Història de la Ciència i de la Tècnica dirigit per Antoni Roca Rosell, on intervenen Maria-Rosa Massa, Carles Puig, Guillermo Lusa, Mary Sol De Mora i Juan M. Muñoz Corbalan.

¹⁴ Garma (1978). Garma (1980). Garma (1988). Garma (1994). Garma (2002).

entre els quals es troba en Jorge Juan (1713-1773), Pedro Padilla (1724-1807) i José Chaix (1765-1811).

El Col·legi de Cordelles de Barcelona i El Colegio Imperial de Madrid

Cerdà va formar part de diverses institucions educatives però on va deixar la seva empremta matemàtica va ser bàsicament en dues. La primera va ser el Col·legi de Nobles Cordelles i en torn a aquesta institució citarem com a significatives les aportacions de Agustí Nieto Galán i Antoni Roca Rosell¹⁵ i les de Garcia-Doncel i Xavier Gassiot¹⁶. El Col·legi de Nobles de Cordelles, d'inspiració renaixentista, és fundat pel notari Joan Cordelles al 1530. Al 1662, els jesuïtes n'agafen la direcció i és gestionat per la Companyia fins a la seva extinció el 1767. Al 1756 el rector de Cordelles sol·licita al rei Ferran VI l'establiment de la càtedra pública de Matemàtiques i és en Cerdà qui l'ocupa fins el 1764 que marxa a Madrid. Resulta especialment interessant assenyalar que en la constitució de la Conferència privada de Física matemàtica i experimental, el seu nucli promotor està format per ex-alumnes del curs de Matemàtiques de Cerdà.

La segona institució de la qual forma part Cerdà és el Colegio Imperial de Madrid, des de 1764 fins a l'expulsió dels jesuïtes d'Espanya al 1767.

Aquest Col·legi és també fundat pels jesuïtes al 1603. A partir de la constitució dels "Reales Estudios" al 1625 té diverses càtedres entre les quals hi ha la de matemàtiques¹⁷.

2.2. La situació del càlcul diferencial a Espanya a mitjans del segle XVIII

Els estudis¹⁸ sobre el desenvolupament del càlcul diferencial a Europa durant el segle XVIII cada vegada més superen i fins i tot qüestionen la visió exclusiva de les dues

¹⁵ Nieto-Galán; Roca (2000).

¹⁶ García-Doncel; Gassiot (2000).

¹⁷ Simón Díaz (1952). Destaquen figures com la de Josep Saragossà (1627-1679), autor de diverses obres, entre les quals *Aritmetica universal que comprehende el arte menor y maior, algebra vulgar y especiosa* (1669) i *Geometria magna in minimis, in III partes divisa: I De Mininimis in communi: II De planis: III De Solidis* (1674).

¹⁸ Sobre aquest tema resulten particularment interessants les aportacions, des de molt diverses visions, de Giulio Giorello (1992), Niccolò Guicciardini (1989), A. Rupert Hall (1980), Joseph E Hofmann (1974), Paolo Rossi (1998), Steven Shapin (1996), per citar-ne alguns.

grans figures de l'època, Isaac Newton (1642-1727) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). El càlcul diferencial a l'Europa del segle XVIII es desenvolupa a partir de diferents protagonistes i no es pot entendre al marge de múltiples factors culturals, socials i fins i tot econòmics. Per altra part tampoc es pot entendre aquest desenvolupament si no és com un complex i continu procés de comunicació entre diferents actors.

Però, evidentment, resulta imprescindible parlar d'aquestes dues grans figures, si més no per estudiar els diferents posicionaments que es produeixen arreu d'Europa. No es tracta d'aprofundir en les obres de Newton o de Leibniz, ni tampoc de reproduir la polèmica entorn de qui va tenir més mèrit en les seves aportacions al càlcul¹⁹. Del que es tracta és apuntar en quines coordenades es mouen els actors "principals", però sobre tot veure el paper que juguen els actors de "segona línia", els que, amb els seus tractats o manuals, realment van construir la nova disciplina.

Està clar que tant Newton com Leibniz no parteixen de zero a l'hora de desenvolupar el nou càlcul. Només per citar-ne alguns, no es pot comprendre l'aparició del càlcul diferencial a finals del segle XVII sense figures com René Descartes (1596-1650), John Wallis (1616-1703), Pietro Mengoli (1626-1686) o Isaac Barrow (1630-1677).

La formulació del càlcul de les fluxions per part de Newton apareix amb l'estudi de les series infinites i efectivament el seu primer treball elaborat al 1671 el titula *Method of Fluxions and Infinite Series*. Però el factor que impulsarà aquest càlcul serà el moviment dels cossos, és a dir la cinemàtica²⁰. El mestre de Newton va ser Barrow i aquest ja va estudiar les corbes com elements generats pel moviment on el temps juga un paper de variable sempre present. Newton aprofundirà aquesta visió i el fonament del seu càlcul residirà en el concepte de quantitats generades per un moviment continu.

Per altra banda, la inicial articulació del càlcul diferencial en mans de Leibniz es produeix a finals de la seva estada a Paris (1672-1676)²¹ i es dona a partir d'una combinació de la geometria, l'àlgebra i la teoria de nombres. De fet els seus primers treballs són sobre combinatòria, però és a partir de l'àlgebra que podrà relacionar la geometria amb les series infinites²². Per tant la naturalesa essencial de l'origen del càlcul leibnizià és algebraica²³, tot i que Leibniz és molt conscient de la potència

¹⁹ Hall (1980).

²⁰ Guicciardini (1989). Paty (1994).

²¹ Hofmann (1974).

²² Grosholz (1992).

²³ Paty (1994).

d'aquest càlcul en la geometria . Efectivament, el seu primer article, on per primera vegada apareix el càlcul diferencial publicat al 1684 a la revista *Acta Eruditorum* de Leipzig, es titula “Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare proi illis calculi genus”.

Podríem dir que una de les característiques que diferencien Newton de Leibniz és que, encara que tots dos tracten de quantitats variables, Newton les considera variant amb el temps mentre que Leibniz – igual que Mengoli – les veu com una successió de valors infinitament propers²⁴. La fluxió és la velocitat del canvi per a un, la diferencial és la diferència infinitament petita entre dos valors successius per a l'altre. I en tots dos apareix la utilització de l' infinitèsim, en un cas lligat a un temps infinitesimal i en l'altre a una longitud infinitèsima²⁵.

Malgrat la crítica d'inconsistència al nou càlcul llençada pel bisbe George Berkeley (1685-1753)²⁶, el nou càlcul va provar la seva potència a l'hora de resoldre vells problemes de la geometria i obrir noves perspectives en el camp de la física. L'essència bàsicament algebraica del càlcul leibnizià és el que va permetre la seva generalització a diferents camps. Leibniz va potenciar el caràcter instrumental del concepte de diferencial, evitant entrar en el terreny teòric. Mentre que la idea de fluxió va estar des del primer moment associada al moviment, enfocada cap a la mecànica que Newton desenvoluparia en els seus *Principia*²⁷.

Però el que voldríem sobre tot emfatitzar aquí són tres idees al voltant dels inicis del nou càlcul diferencial. La primera és en relació als deixebles de cada un dels dos iniciadors del càlcul. La veritable consolidació de la disciplina es produeix a partir d'aquests deixebles o seguidors. De Newton són particularment Simpson amb *A New Treatise of Fluxions* al 1737 – posteriorment amb *The Doctrine and Application of fluxions* al 1750 – i Colin Maclaurin (1698 –1746) amb el seu *A treatise of fluxions* al 1742 els que consoliden el càlcul de fluxions. No són els primers autors que pretenen explicar el nou mètode, però sí els que ho fan de forma exhaustiva i sistemàtica i que volen donar clarament les definicions i els conceptes sobre els quals es recolza el nou

²⁴ Grattan-Guinness (1984). Massa (1998).

²⁵ Giorello (1992).

²⁶ “And what are these fluxions ? The velocities of evanescent increments. And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?” (Berkeley, G. 1734. *The analyst; or a discourse addressed to an infidel mathematician*, London, for J. Tonson. p. 44)

²⁷ Newton publica *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* al 1686, molt abans que *The Method of Fluxions and Infinite Series* publicat al 1736, però els seus treballs sobre fluxions ja eren coneguts entre els seus col·legues.

càlcul, sobre tot després de la polèmica amb Berkeley. En el cas de Simpson el seu intent és clarament pedagògic²⁸ i en el cas de Maclaurin el seu intent va en la direcció de conferir el màxim rigor i consistència a la nova disciplina²⁹.

També veiem un procés similar a partir l'aportació de Leibniz. No són directament els textos de Leibniz els que popularitzen el càlcul diferencial a Europa sinó el text del Marquès de l'Hospital (1661-1704) *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* publicat al 1696³⁰, o el de Christian Wolff (1679-1754) que a partir del 1713 publica l'enciclopèdia *Elementa Matheseos Universae* o finalment *Lectiones de calculo integralium* que Jean Bernoulli (1667-1748) publica al 1742. Aquests són els autors i els seus textos els que arriben arreu d'Europa i és a partir d'aquests matemàtics i ensenyants que es produeix el procés de consolidació del càlcul diferencial.

La segona idea que voldríem assenyalar és que, en aquest procés de configuració d'un nou camp matemàtic, ja des dels seus inicis, el seu cos teòric no és quelcom estàtic i donat una vegada per totes. El concepte de fluxió varia sensiblement de Newton a Simpson o Maclaurin. Els moments de Newton – els infinitèsims de temps – desapareixen en mans dels seus successors. Cada actor que intervé en aquest procés aporta, modifica o elimina aquells elements que ell considera, tot mantenint i desenvolupant les noves tècniques de càlcul. Igualment passa amb les diferencials leibnizianes. El concepte que té l'Hospital de la diferencial és una mica diferent del que té Leibniz. Per aquest darrer les diferencials són diferències infinitament petites entre valors successius d'una variable. L'Hospital considera, en canvi, les variables no com recorrent una successió de valors infinitament propers, sinó com creixent o decreixent de manera continua³¹.

I finalment la tercera idea que voldríem plantejar està molt relacionada amb l'anterior i es refereix a la permeabilitat que es produeix entre els dos “grans corrents” del càlcul diferencial a Europa. Defugint del tòpic que ens planteja la història dels inicis del càlcul a partir de la polèmica Newton-Leibniz, creiem que molt ràpidament cadascun dels protagonistes, per molt que es situï dins d'un dels dos corrents, coneix i s'apropia dels elements que troba més interessants del corrent “contrari”. Així podem veure autors

²⁸ Owen (1784). Guicciardini (1989).

²⁹ Bruneau (2011). Guicciardini (1989).

³⁰ Blanco (2004).

³¹ Grattan-Guinness (1984).

anglesos com Edmund Stone (1702-1768)³², traduïnt al llenguatge de fluxions el manual del leibnizià Hospital. Simpson fent un reconeixement de les avantatges del “Mètode Diferencial” en el seu llibre *The Doctrine and Application of fluxions*³³. O el nostre personatge d’estudi, Cerdà, newtonià convençut, adoptant la notació leibniziana. En els diferents textos d’uns i dels altres és freqüent trobar referències a l’altre corrent, presentant-lo com “una altra manera de fer el mateix”.

En allò que fa referència a Espanya, resulta obligat començar parlant de Francisco de La Torre Argáiz, el qual ja en l’any 1717 apareix defensant unes tesis a la Universitat de Toulouse que contenen força elements de càlcul diferencial i integral, tot i que l’aportació posterior d’aquest personatge resta desconeguda i també, per tant, qualsevol continuïtat³⁴. Però, de fet, un dels primers personatges que introdueix el nou càlcul és Padilla a la Academia Militar de Matemáticas del Cuartel de los Guardias de Corps de Madrid, a partir de 1756 amb *Curso militar de Mathematicas, sobre partes de esas Ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra*. Es tractaria d’un dels primers textos coneguts a Espanya dedicat a l’ensenyament amb elements de càlcul diferencial i integral. Cuesta Dutari analitza³⁵, a partir d’un inventari, els llibres i revistes matemàtiques de la Academia de los Guardias de Corps, on es poden comprovar les fonts de que va disposar Padilla i on es poden trobar obres de Newton, Maclaurin i Wolff, entre altres.

També a la Academia Militar de Barcelona es poden suposar coneixements de càlcul diferencial per part dels professors que hi impartien classes a partir d’alguns treballs que s’han trobat, com assenyalen diversos historiadors³⁶.

L’altre personatge important dins aquest àmbit és Jorge Juan (1713-1773), alumne de la Academia de Guardias Marinas de Cádiz, el qual publica al 1748 *Observaciones Astronómicas* amb nombroses referències al càlcul diferencial i al 1771 el seu *Examen Marítimo* on fa ús generalitzat del càlcul diferencial i integral.

D’una altra banda, al Colegio Imperial de Madrid, cal destacar a Johanes Wendlingen (1715-1790) a partir de 1750 i a Christian Rieger (1714-1780) a partir de 1761 dels

³² Blanco (2008).

³³ Simpson (1750); p. 150.

³⁴ Cuesta Dutari (1985).

³⁵ Cuesta Dutari (1985).

³⁶ Agustí i Culell (1985). Massa (2006). Roca Rosell i altres (2007). Massa i altres (2011).

quals s'han trobat nombrosos manuscrits sobre càlcul diferencial molt probablement relacionats amb les classes que donaven³⁷.

Cerdà probablement coneixia els treballs de Padilla o de Jorge Juan, però sobre tot coneixia les aportacions de Wendlingen i Rieger amb els quals va coincidir a Madrid. Després de Cerdà, caldria parlar de Bails com autor del primer manual contenint càlcul diferencial i integral i que esdevé el text de referència durant cinquanta anys a qualsevol centre d'Espanya on s'ensenyessin matemàtiques³⁸. També caldrà esperar a Juan Justo García (1752-1830), catedràtic a la Universitat de Salamanca, per començar a introduir el càlcul diferencial a la Universitat, amb la publicació de *Elementos de aritmética, algebra y geometría* al 1782.

³⁷ Rieger. RAH, Cortes 9/2792.

Wendlingen. RAH, Cortes 9/2812, 9/3811.

³⁸ Bails va ser director de la Real Academia de San Fernando. Va publicar *Elementos de Matemáticas*, en onze volums, el tercer del qual està dedicat al Càlcul Integral i Diferencial. Els va anar publicant des del 1772 fins al 1779.

3. Tomàs Cerdà : un home dedicat a l'ensenyament

Tomàs Cerdà neix a Tarragona , el 22 de desembre de 1715 i entra a la Companyia de Jesús el 3/04/1732³⁹. Estudia Humanitats a Tarragona, Filosofia a Gandia i Teologia a València. La Ratio Studiorum de la Companyia incloïa Matemàtiques a la Filosofia tot i que sembla que les Matemàtiques ensenyades a Gandia eren molt elementals.

El curs 1741-42 s'inicia com professor d'Humanitats a Lleida, després dona classes de Retòrica a Manresa i del 43 al 46 a Lleida.

De 1747 a 1750 està a Zaragoza com a professor de Filosofia. Es enviat per la Companyia de Jesús, al 1750, a Cervera com a professor fins al 1753. Les úniques proves d'aquesta estada son les *Iesuiticae Philosophiae Theses* dels seus deixebles, publicades al 1753. Segons dedueix Cuesta Dutari, a partir d'aquestes tesis, Cerdà en aquell moment no coneixia el càlcul diferencial⁴⁰.

Després, al mateix any 1753, és enviat a Girona, durant un any, per ensenyar Filosofia⁴¹. A continuació és enviat a Marsella. Els diferents historiadors que han estudiat la figura de Cerdà no es posen d'acord amb la data que Cerdà va a Marsella, la qual oscil·la entre 1753 i 1755⁴². En qualsevol cas, l'estada de Cerdà a Marsella resulta fonamental per a la seva vida professional posterior. A Marsella té com a guia el P. Esprit Pezenas (1692-1776), un professor jesuïta d'hidrografia i director de l'Observatori Reial de Marsella. Pezenas ha escrit obres relacionades amb navegació i traduït al francès diverses obres d'autors anglesos com, per exemple, *The Elements of the Method of Fluxions* de Maclaurin. De la importància d'aquesta estada en queda constància a la carta que Cerdà enviarà més tard a Simpson:

En esta época yo era profesor de Filosofia en la Academia Cervariense, levantada hacía poco por Felipe V, y aun cuando yo estaba poco formado en Matemáticas, éste tenía otra opinión sobre éstas.

³⁹ Dades facilitades per Josep M. Benítez i Riera extretes dels catàlegs anuals de la Companyia de Jesús.

⁴⁰ Cuesta Dutari (1985); p. 243.

⁴¹ Benítez (1988). Benítez (1996).

⁴² Segons Selles i Peset va a Marsella al 1754 [Selles; Peset; Lafuente (1988)], segons Sommervogel, Navarro i López-Piñero és enviat a Marsella cap al 1755 [Sommervogel (2008). Navarro (2001). López-Piñero i altres (2001)] i finalment, segons Udías, hi va al 1753 [nota de peu de pàgina de l'article de Udías (2010)].

Fui seleccionado entre éstos para ir a la Galia con esta mira allí estuve varios años de observación; por fin regresé a mi Barcelona (España), ...⁴³

Segons aquesta carta, Cerdà hauria estat a Marsella més d'un any. Cap a finals de 1756 Cerdà arriba a Barcelona. Com ja hem dit anteriorment, al 1756 el rector del Col·legi de Cordelles havia demanat al rei Ferran VI la creació i dotació de la càtedra de matemàtiques. El memorial és adreçat primer a l'Ajuntament de Barcelona amb una petició d'informe favorable⁴⁴. En aquesta sol·licitud es fa referència que la Companyia ja havia previst la càtedra per a Tomàs Cerdà i per aquest motiu l'havia enviat a Marsella⁴⁵. Es demana una dotació per a la càtedra i per a un suplent. Un dels aspectes més interessants és que l'Audiència de Catalunya emet un informe favorable a la creació d'aquesta càtedra amb la "obligación de que en el referido Colegio se haian de enseñar las ciencias de Mathematicas a toda calidad de personas"⁴⁶. És a dir les classes quedaran obertes a públics més amplis dels estrictament nobles, com per exemple a artesans.

Per tant, la primera càtedra pública de matemàtiques a Barcelona serà ocupada per Cerdà. Aquest estarà impartint classes de matemàtiques – cal incloure aquí també física, astronomia i arquitectura – fins l'any 1764. Durant aquests anys publica dos manuals que bàsicament estan dirigits als seus alumnes : *Liciones de Mathemática o Elementos Generales de Arithmética y Algebra para el uso de la clase* (2 volums) al 1758 i després al 1760 *Elementos Generales de Geometría para el uso de la clase*, com ja hem comentat en la introducció. I de tots els altres manuals previstos només publica al 1764 *Lección de Artilleria*. Durant la seva estada al col·legi de Cordelles impulsa la creació d'una biblioteca científica en aquest centre i probablement és amb aquesta intenció que Cerdà va escriure al 1758 una carta a Simpson demanant-li consell sobre autors anglesos que haguessin tractat diversos temes científics⁴⁷. Entre altres coses la carta va servir per identificar la lletra de Cerdà i poder reconèixer quina era l'obra pròpia d'aquest autor. De la mateixa manera en la carta es confirmava la voluntat de publicar un *Tratado de Fluxiones* per part de Cerdà:

⁴³ Extret de la traducció al castellà de la carta de Cerdà a Simpson . Hernández (1985); cap. VII. La carta original, escrita en llatí , es troba entre els manuscrits de Cerdà. [RAH Cortes 9/02792].

⁴⁴ Gassiot (1996); p.84.

⁴⁵ Arxiu Històric de la Ciutat : Acords 1756 f.245.

⁴⁶ Gassiot (1996); p.87. Amb referència a A.H.C. Política.. Real Decretos [1756-1757] f. 225.

⁴⁷ Cerdà, Tomàs, *Carta de Cerdà a Simpson*. Barcelona 1758. RAH, Cortes 9/2892. Veure Annex 1 (apèndix).

(...) ahora dispongo el Tratado de las Fluxiones, en esto te sigo a tí como guía y maestro y como sinceramente reconozco y aunque lea a otros autores, italianos y alemanes⁴⁸ que disertan sobre cálculo diferencial e integral, sin embargo todo mi pensamiento está puesto en emularte en la claridad de tu método y me consideraría feliz si (al escribir) mi tratado sobre Fluxiones, este mereciese ser llamado no mío sino tuyo, sobre todo por su doctrina (...) ⁴⁹

Sabem que alguns alumnes de Cerdà al Col·legi de Cordelles també ho van ser de l'Acadèmia Militar de Matemàtiques⁵⁰. Aquest fet ens suggereix que Cerdà probablement va mantenir alguna relació amb els professors de l'Acadèmia de Matemàtiques.

Al 1764 Cerdà se'n va al Colegio Imperial de Madrid – enduent-se els seus manuscrits amb ell – i és nomenat Cosmògraf Real. Continua impartint classes a Madrid fins 1767, on el sorprèn l'expulsió dels jesuïtes d'Espanya per part de Carles III. S'exilia a Itàlia i mor el 18 de març de 1791 a Forlì. D'aquests anys a Itàlia no se'n sap res de la seva vida ni de la seva obra.

Els manuscrits de Cerdà es van quedar a Madrid. La Real Academia de la Historia va comprar els manuscrits del Colegio Imperial i actualment es troben a la secció “Cortes”. Entre els manuscrits de Cerdà s'han pogut identificar, entre altres, a més a més del

⁴⁸ Entre els manuscrits de Cerdà, s'ha trobat una llarga llista de llibres de diversos autors estrangers que probablement Cerdà havia llegit o volia tenir. Destaquem alguns d'ells, particularment els relacionats amb treballs sobre càlcul diferencial. La majoria són anglesos :

Blake, Francis (1708-80). *An Explanation of Fluxions in a short Essay on the Theory*. 1741. (tot i que aquest assaig no és citat a partir del nom de l'autor sinó de l'editor ja que en aquell moment l'assaig era anònim).

Colson, John (1680-1760).

Ditton, Humphry (1675 -1715). *An Institution of Fluxions*. 1706.

Harris, John (1666-1719). *New Short Treatise of Algebra*. 1702.

Hayes, Charles (1678–1760). *A Treatise of Fluxions*. 1704.

Jurin, James (1684 - 1750).

Maclaurin, Colin (1698 –1746). *A treatise of Fluxions in two books* . 1742.

Simpson, Thomas (1710-1761). *A treatise of Fluxions*. 1750.

Saunderson, Nicholas (1682-1739). *The Method of Fluxions*. 1756.

Stone, Edmund (1702-1768). *The Method of Fluxions*. 1730. (La primera part és la traducció de l'Hospital, *The Method of Fluxions both Direct and Inverse*).

Un alemany: Wolff, Christian (1679-1754). *Elementa Matheseos Universae*. 1713.

Dos francesos :

L'Hospital, Marquis de (1661-1704). *The Method of Fluxions both Direct and Inverse. The Former being A Translation from the Celebrated Marquis De L'Hospital's Analyse des Infiniments Petits : And the Latter Supply'd by the Translator, E. Stone, F.R.S.* 1730.

Crouzas, Jean Pierre (1663-1750). *Commentaire sur l'analyse des infiniment petits*. 1721.

D'italians no n'hi ha cap però probablement es deu referir a Maria Gaetana Agnesi (1718-1799).

⁴⁹ Extret de la traducció al castellà de la carta de Cerdà a Simpson . Hernández (1985); cap. VII.

⁵⁰ Roca Rosell i altres (2007). Massa (2006). Gassiot (1996).

Tratado de Fluxiones, les següents obres: *Tratado de cónicas y aplicación del Algebra a la Geometria*, *Tratado de Mecánica*, *Tratado de Óptica*, *Tratado de Astronomia*.⁵¹

Així doncs podem dir que Cerdà per sobre de tot va ser un home dedicat a l'ensenyament. Que va saber adonar-se de la importància de les noves disciplines científiques que estaven desenvolupant-se a Europa i, tenint una gran capacitat per assimilar les noves teories, va comprendre que calia ensenyar-les al seu país, adonant-se que l'eina essencial per poder transmetre el coneixement era el llibre de “text”.

⁵¹ RAH 9/2793. De la Aplicación del Algebra a la Geometria.
RAH 9/2812 Fluxions i altres escrits de T. Cerdà.
RAH 9/2788 Elementos Generales de Mecánica.
RAH 9/2792 Tratado de Astronomia i fragments d'altres obres i altres autors.
RAH 2/2811 Optica i altres escrits.

4. El llibre de Thomas Simpson publicat al 1750 : *The Doctrine and Application of Fluxions*⁵²

Thomas Simpson⁵³, nascut a Market Bosworth de Leicester (Gran Bretanya), va ser fonamentalment un ensenyant de matemàtiques, primerament a Nuneaton i posteriorment a Londres. Va formar part de Royal Military Academy a Woollwich i va ser membre de la Royal Society i de la Royal Swedish Academy of Sciences. El primer llibre publicat per ell va ser *A New Treatise of Fluxions* al 1737, un dels primers textos que tenien com objectiu presentar el mètode les fluxions, iniciat per Isaac Newton, d'una forma didàctica. També va treballar en teoria de probabilitats publicant *The Nature and Laws of Chance* (1740) i *An attempt to show the advantage arising by taking the mean of a number of observations in practical astronomy* (1757). A més a més va publicar llibres relacionats amb diferents camps de les matemàtiques, mecànica i astronomia. Entre altres, destaquen *A Treatise of Algebra* (1745), *Elements of Plane Geometry* (1747), *Exercises for Young Proficients in the Mathematics* (1752), *Miscellaneous Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects in Mechanics, Physical Astronomy and Speculative Mathematics* (1757)⁵⁴.

Nosaltres ens centrarem en el llibre *The Doctrine and Application of fluxions*, publicat al 1750, que es tracta d'una revisió del primer tractat publicat al 1737. Aquest llibre, pensat fonamentalment per a l'ensenyament, donada la forma clara i concisa en què està escrit, conté dues parts. Cada secció està encapçalada per un títol i està subdividida en apartats numerats que permet referir-se a aquests posteriorment.

La primera part del llibre consta de 12 seccions i la primera, que té 13 pàgines, porta per títol *Of the Nature, and Investigation, of Fluxions*. Consta de dues proposicions, dos corol·laris i tres regles on es dona el concepte de fluxió i les regles per obtenir-la. Es tracta de la secció més teòrica on les proposicions, els corol·laris i les regles queden perfectament enunciades i demostrades. Les seccions que venen a continuació tracten de les diferents aplicacions de les fluxions a la geometria : problemes de màxims i mínims, tangents, punts d'inflexió, etc. En aquestes seccions podem trobar una introducció general i després una col·lecció de problemes. Per exemple la secció 2 que tracta de

⁵² Veure annex 2 (apèndix).

⁵³ Gillispie (1981).

⁵⁴ Owen (1784).

màxims i mínims ocupa unes 12 pàgines amb 22 problemes. La secció 6 torna a ser més teòrica, on estudia el mètode invers, és a dir la integració i les seves regles. Fins a la secció 10 tornem a trobar col·leccions de problemes de geometria on s'aplica la teoria de les fluxions: càlcul d'àrees i longituds de corbes, volums i superfícies de sòlids. Les dues darreres seccions de la primera part estan dedicades a problemes de mecànica.

La segona part del llibre consta de 11 seccions i la primera està dedicada a l'aplicació de les fluxions a la trigonometria esfèrica, amb quatre proposicions. La segona està dedicada a les equacions fluxionals, amb quatre exemples i les seccions següents fins a la setena tracten de les diferents formes de trobar les fluents a partir de les fluxions, incloent la utilització de series infinites. En totes aquestes seccions apareixen nombrosos problemes i exemples. Les seccions 8 i 9 estan dedicades a problemes de mecànica. La secció 10 és una ampliació de problemes de màxims i mínims i la darrera secció és una col·lecció de 37 problemes de geometria, mecànica, òptica, astronomia,...que ocupen 68 pàgines. El llibre acaba amb una taula de logaritmes hiperbòlics.

5. Els manuscrits de Cerdà que fan referència al Tractat sobre fluxions

Els manuscrits de Cerdà que es troben a l'Academia de la Historia de Madrid actualment estan distribuïts i barrejats amb els d'altres autors en diversos lligalls però fonamentalment en els 9/2792 i 9/2812 de la col·lecció Cortes. En allò que té relació al *Methodo Directo, è Inverso de las Fluxiones* que Cerdà cita en el pròleg del seu primer llibre imprès o també en la carta dirigida a Simpson o, en qualsevol cas, en allò que té relació amb fluxions, hem trobat 354 pàgines manuscrites – d'unes dimensions de 21x31 cm – en el 9/2792 i 116 en el 9/2812, el que fa en total 470 pàgines. D'aquestes hi hauria 377 pàgines escrites en una primera versió, o com esborrany, i 93 rescrites en una segona versió. Les dues versions es distingeixen per diverses raons:

- ✓ En la primera de les seves versions de vegades utilitza expressions més pròpies de la terminologia leibniziana, la qual cosa no passa amb la segona.
- ✓ La primera versió resulta molt més il·legible, amb frases barrades i anotacions al marge. L'altra és molt més polida.
- ✓ En la versió primera els dibuixos estan descuidats o no n'hi ha i en canvi a la segona s'ha tingut molta cura d'aquests.
- ✓ En la primera versió els capítols no estan numerats i en canvi a l'altra si.

Això ha permès veure que alguns capítols escrits en una primera versió tenen la seva rèplica en 14 capítols de la segona versió, tots ells numerats – del 1 al 13 – excepte el darrer que es veu que es tracta de la nova versió perquè reuneix totes les altres característiques a més d'existir la versió primera d'aquest.

A partir de dades biogràfiques de Cerdà i de la carta d'aquest dirigida a Simpson, es pot deduir que la primera versió la podia haver començat a escriure cap l'any 1757, quan estava a Barcelona i un any o dos més tard la segona versió.

És molt probable que aquesta primera versió fos simplement el recull dels apunts que preparava per a les seves classes ja que molt sovint trobem anotat al marge “Quaderno para la clase”. Per altra banda ens sembla una hipòtesi prou raonable pensar que, si no en la seva totalitat, al menys el que anomenarem com Primera Part, en Cerdà ho pensés publicar i que el títol més probable fos “Tratado de Fluxiones” des del moment que aquest nom apareix en el títol d'un dels seus capítols.

De manera que, sovint ens referirem al *Tratado de Fluxiones* com si efectivament fos un text preparat per a la seva publicació i el situarem entre 1757 i 1759.

En relació a l'ordre dels capítols, a part dels 13 primers numerats, hem adoptat diversos criteris per arribar a una conclusió:

- ✓ Les anotacions del propi Cerdà en els seus manuscrits, on de vegades fa algun comentari sobre l'ordre.
- ✓ L'ordre dels capítols del llibre de Simpson, ja que està clar que aquest llibre és la seva referència principal.
- ✓ La disposició en els manuscrits trobats.
- ✓ La catalogació dels historiadors precedents, particularment Hernández Alonso i Cuesta Dutari.

A partir d'aquests criteris creiem que el primer esborrany del *Tratado de Fluxiones* estaria estructurat de la següent manera:

(Primera Part)⁵⁵

Del Calculo Diferencial e Integral (I-1)

Cap. De las Fluxiones de Quantidades Algebraicas (I-2, I-3)

Cap. De las Fluxiones Superiores (I-4)

Cap. Aplicacion de las Fluxiones para la resolucion de los Problemas de Maximo ô Minimo (I-5)

Capitulo. De la Aplicacion de las Fluxiones para tirar tangentes a las Curvas (I-6)

Capítulo. Aplicacion de las fluxiones del Segundo Orden para encontrar el punto de Inflexion ô buelta de las Curvas (I-7)

Cap. Aplicacion de las primeras y segundas Fluxiones para determinar el radio de curvatura y las Evolutas de las Curvas (I-8)

Parte 2. Del Methodo Inverso de las Fluxiones (I-9a)

Del uso de las Series Infinitas para encontrar las Fluents (I-9b)

Cap. De la Cantidad que se ha de añadir a la fluente encontrada (I-10)

Cap. Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para la Quadratura de las curvas (I-11)

Cap. Del uso de las Fluxiones para la rectificacion de las curvas (I-12)

⁵⁵ La transcripció dels títols dels capítols ha respectat el contingut exacte i l'ortografia dels originals. Entre parèntesi hem indicat el que podria ser una hipotètica divisió en parts i una possible numeració dels capítols no numerats originalment.

Cap. Del uso de las Fluxiones para encontrar lo solido de los cuerpos (I-13)
Cap. Del uso de las Fluxiones para encontrar las Superficies de los Solidos (I-14)
Capitulo. De las Fluxiones de Quantidades Exponenciales (I-15)
Capitulo. De la Transformacion de Fluxiones (I-16)
Adiciones al Tratado de Fluxiones (I-apèndix)

(Segona part)

Capitulo De la Resolucion de las Equaciones Fluxionales, ô modo de encontrar la relacion de las Quantidades Fluents por la de las Fluxiones (II-1)

De la Comparacion de las Fluents ô Methodo para encontrar una Fluente dada otra (II-2)

Cap. De las Fluents de Fracciones Racionales de diferentes dimensiones, segun las Formulas de la Harmonia Mensurarum de Cotes (II-3)

Cap. Methodos para investigar las Fluxiones, quando las Quantidades y sus Logarithmos, los Arcos y sus Senos & se encuentran entre si multiplicados ô ocurren casos de la misma especie (II-4)

Cap. De que suerte las Fluents encontradas por series infinitas se puedan hazer convergentes (II-5)

Cap. De la Aplicacion de las Fluxiones a la Resolucion de aquellas especies de Problemas de Maximis y Minimis, que dependen de una Particular Curva, cuja naturaleza se debe determinar (II-6)

Cap. Resolucion de varios Problemas de diferentes Especies (II-7)

Cap. De las Fluxiones de los Lados y Angulos de los Triangulos Esphericos (II-8)⁵⁶

Lla segona versió dels primers catorze capítols possiblement preparats per ser impresos seria:

Cap 1. Explicase la Naturaleza de las Fluxiones

Cap 2. Algunos Problemas para encontrar las Fluxiones de las Quantidades Algebraicas

Capitulo 3. Reglas Unicas para encontrar las Fluxiones de las Quantidades Algebraicas sacadas de los Problemas precedentes

Cap 4. De las Fluxiones superiores

⁵⁶ En la proposta d'ordre d'Hernández Alonso, recollida parcialment per Cuesta Dutari, no inclou la primera versió dels primers 14 capítols i inclou en la primera part molts més capítols, sense haver especificat cap criteri. Veure Annex 3 (apèndix).

Cap 5. Resuelvense por las Fluxiones algunos problemas de Maximo y Minimo

Cap 6. Explicase el Methodo de tirar las tangentes a las Curvas por medio de las Fluxiones

Cap 7. Como se encuentren los Puntos de Inflexion de las Curvas por las Fluxiones del Segundo Orden

Capitulo 8. Determinanse por el Methodo directo de las Fluxiones los radios de Curvatura y las Evolutas de las Curvas

Capitulo 9. Explicase el Methodo Inverso de las Fluxiones y algunas de sus Reglas

Cap 10 Como se haia de corregir la Fluente encontrada por el Methodo Inverso de las Fluxiones

Cap 11. Aplicacion del methodo Inverso de las Fluxiones para la Quadratura de las Curvas

Cap. 12 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para la Rectificacion de las Curvas

Cap 13 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para encontrar lo solido de los Cuerpos

Cap. Aplicacion al Methodo inverso de las Fluxiones para encontrar la Superficie de los Cuerpos (Cap 14)

6. Anàlisi comparatiu dels manuscrits de Cerdà amb el llibre de Simpson i amb altres textos de l'Espanya de l'època

L'estudi comparatiu que ens hem proposat en aquest treball no pretén ser exhaustiu, entre altres motius perquè ens hem centrat només en alguns capítols dels dos textos. En aquest estudi es farà obligat referir-nos no solament als dos autors sinó també a altres autors contemporanis que també tingueren rellevància en la introducció del càlcul diferencial a Espanya, com ara Padilla, Wendlingen o Rieger, tots ells dedicats a l'ensenyament de les matemàtiques i pràcticament els únics en tractar el càlcul diferencial en aquell moment. L'anàlisi es desenvoluparà fent en primer lloc una comparació general a partir dels índex i de l'estructura general que presenten els diferents textos. En segon lloc ens centrarem en els aspectes més teòrics que fan referència a les definicions generals, a continuació ens fixarem en la notació utilitzada pels autors i finalment prendrem dos temes més específics per analitzar més a fons com cada autor els tracta.

6.1. Els continguts teòrics generals

A fi de comparar els dos textos analitzarem la seva estructura. En el cas que tractem, a més a més, cal també comparar les dues versions de Cerdà. A partir dels índex dels tres textos hem confeccionat la següent taula comparativa :

Primera versió de Cerdà	Segona versió de Cerdà	El llibre de Simpson
Del Calculo Diferencial e Integral (2 fulls)	Cap. 1 Explicase la Naturaleza de las Fluxiones (4 fulls)	Section I (Part I) : Of the Nature, and Investigation, of Fluxions (13 pàg)
Cap. De las Fluxiones de Quantidades Algebraicas (7 fulls)	Cap. 2 Algunos Problemas para encontrar las Fluxiones de las Quantidades Algebraicas (7 fulls)	
	Cap. 3 Reglas unicas para encontrar las Fluxiones de las Quantidades Algebraicas sacadas de los Problemas precedentes (4 fulls)	
Cap. De las Fluxiones Superiores (4 fulls)	Cap. 4 De las Fluxiones superiores (7 fulls)	
Cap. Aplicacion de las Fluxiones para la resolución de los Problemas de Maximo ô Minimo (8 fulls)	Cap. 5 Resuelvense por las Fluxiones algunos Problemas de Maximo y Minimo (7 fulls)	Section II (Part I): Of the Application of Fluxions to the Solution of problems DE MAXIMIS ET MINIMIS (37 pàg)
Capitulo. De la Aplicacion de las Fluxiones para tirar tangentes a las curvas. (11 fulls)	Cap. 6 Explicase el Methodo de tirar las tangentes a las Curvas por medio de las Fluxiones (7 fulls)	Section III (Part I): The Use of Fluxions in drawing Tangents to Curves (14 pàg)
Capitulo. Aplicacion de las fluxiones de segundo orden para encontrar el punto de Inflexion ô buelta de las curvas. (5 fulls)	Cap. 7 Como se encuentren los Puntos de Inflexion de las Curvas por la Fluxiones de Segundo Orden (7 fulls)	Section IV (Part I): Of the Use of Fluxions in determining the Points of Retrogression, or contrary Flexure in Curves (6 pàg)
Cap. Aplicacion de las primeras y segundas fluxiones para determinar el radio de curvatura y las Evolutas de las curvas. (10 fulls)	Cap. 8 Determinanse por el Methodo Directo de las Fluxiones los Radios de Curvatura y las Evolutas de las Curvas (7 fulls)	Section V (Part I): The Use of Fluxions in determining the Radii of Curvature, and the Evolutes of Curves (13 pàg)
Cap. Del Methodo Inverso de las Fluxiones. (10 fulls)	Cap. 9 Explicase el Methodo Inverso de las Fluxiones y algunas de sus Reglas (5 fulls)	Section VI (Part I): Of the Inverse Method, or the Manner of determining the Fluents of given Fluxions (37 pàg)
Cap. Del uso de las Series Infinitas para encontrar las Fluents (2 fulls)		
Cap. De la Cantidad que se ha de añadir a la fluente encontrada. (4 fulls)	Cap. 10 Como se haia de corregir la Fluente encontrada por el Methodo Inverso de las Fluxiones (6 fulls)	
Cap. Aplicacion del Methodo inverso de las Fluxiones para la Quadratura de las curvas. (22 fulls)	Cap. 11 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para la Quadratura de las Curvas. (13 fulls)	Section VII (Part I) : Of the Use of Fluxions in finding the Areas of Curves (35 pàg)

Primera versió de Cerdà	Segona versió de Cerdà	El llibre de Simpson
Cap. Del uso de las Fluxiones para la Rectificacion de las curvas. (11 fulls)	Cap. 12 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para la Rectificación de Curvas (9 fulls)	Section VIII (Part I): The Use of Fluxions in the Rectification, or finding the Lengths, of Curves (15 pàg)
Cap. Del uso de las Fluxiones para encontrar lo solido de los cuerpos.(11 fulls)	Cap. 13 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para encontrar lo solido de los Cuerpos (5 fulls)	Section IX (Part I): The Application of Fluxions in investigating the Contents of Solids (16 pàg)
Cap. Del uso de las fluxiones para encontrar las superficies de los solidos (5 fulls)	Cap. Aplicacion del Methodo inverso de las Fluxiones para encontrar la Superficie de los Cuerpos (Cap 14, 5 fulls)	Section X (Part I): The Use of Fluxions in finding the Superficies of Solid Bodies (15 pàg)
Cap. De las Fluxiones de Quantidades Exponenciales (I-15, 3 fulls)		Section I (Part II): The Manner of investigating the Fluxions of Exponentials, with Those of the Sides and Angles of Spherical Triangles (13 pàg)
Cap. De la Transformacion de las Fluxiones (I-16,15 fulls)		Section IV (Part II): Of the Transformation of Fluxions (16 pàg)
Adiciones al Tratado de Fluxiones (I-apèndix, 31 fulls)		Correspon a parts de diverses seccions II, III, V, VI, VIII i IX (Part I) i la secció IV (Part II)
Capitulo De la Resolucion de las Equaciones Fluxionales, ô modo de encontrar la relacion de las Quantidades Fluents por la de las Fluxiones (II-1, 16 fulls)		Section II (Part II): Of the resolution of fluxional Equations, or the Manner of finding the Relation of the flowing Quantities from that of the Fluxions (17 pàg)
De la Comparacion de las Fluents ô Methodo para encontrar una Fluente dada otra (II-2, 24 fulls)		Section III (Part II): Of the Comparison of Fluents, or the Manner of finding one Fluent from another (26 pàg)
Cap. De las Fluents de Fracciones Racionales de diferentes dimensiones, segun las Formulas de la Harmonia Mensurarum de Cotes (II-3, 35 fulls)		Section V (Part II): The Investigation of Fluents of rational Fractions, of several Dimensions, according to the Forms in Cotes's HARMONIA MENSARUM (41 pàg)
Cap. Methodos para investigar las Fluents, quando las Quantidades y sus Logarithmos, los Arcos y sus Senos & se encuentran entre si multiplicados ô ocurren casos de la misma especie (II-4, 8 fulls)		Section VI (Part II): The Manner of investigating Fluents, when Quantities, and their Logarithms Arcs and their Sines, &c. are involved together: With other Cases of the like Nature. (8 pàg)

Text de Cerdà	Llibre de Simpson
Cap. De que suerte las Fluxiones encontradas por series infinitas se puedan hazer convergentes (II-5, 25 fulls)	Section VII (Part II): Showing how Fluents, found by Means of Infinite Serieses, are made to converge (24 pàg)
Cap. De la Aplicacion de las Fluxiones a la Resolucion de aquellas especies de Problemas de Maximis y Minimis, que dependen de una Particular Curva, cuia naturaleza se debe determinar (II-6, 24 fulls)	Section X (Part II): Of the Application of Fluxions to the Resolution of such Kinds of Problems DE MAXIMIS ET MINIMIS, as depend upon a particular Curve, whose Nature is to be determined (19 pàg)
Cap. Resolucion de varios Problemas de diferentes Especies (II-7, 73 fulls)	Section XI (Part II): The Resolution of Problems of various Kinds. (69 pàg)
Cap. De las Fluxiones de los Lados y Angulos de los Triangulos Esphericos (II-8, 13 fulls)	Section I (Part II): The Manner of investigating the Fluxions of Exponentials, with Those of the Sides and Angles of Spherical Triangles (13 pàg)
	Section XI (Part I) : Of the Use of Fluxions in finding the Centers of Gravity, Percussion, and Oscillation of Bodies (26 pàg)
	Section XII (Part I): Of the Use of Fluxions in determining the Motion of Bodies affected by centripetal Forces (47 pàg)
	Section VIII (Part II): The Use of Fluxions in determining the Motion of Bodies in resisting Mediums (25 pàg)
	Section IX (Part II): The Use of Fluxions in determining the Attraction of Bodies under different Forms (35 pàg)
	A Table of Hyperbolical Logarithms (Part II) (69 pàg)

Per construir aquesta taula hem pres com a referència els manuscrits de Cerdà. Per als primers 14 capítols, amb doble columna, hem diferenciat les dues versions del mateix Cerdà.

El primer que observem és que en aquests 14 primers capítols l'ordre és fidel a l'ordre de les 10 primeres seccions de la primera part del llibre de Simpson.

A partir del capítol 14 hem pogut establir algunes correspondències entre capítols i seccions però l'ordre queda alterat.

L'altra cosa que es pot observar és que el text de Simpson té diverses seccions – que hem col·locat al final – que no tenen els seus corresponents capítols de Cerdà. De totes maneres hem trobat algunes pàgines manuscrites de Cerdà que fan referència als continguts d'aquestes seccions però que no sembla que formessin part del *Tratado de Fluxiones*.

També hem observat que Cerdà no respecta exactament l'estructura del llibre de Simpson, desglossant, en alguna ocasió, en diversos capítols una sola secció del llibre de Simpson.

Igualment apareixen capítols en el *Tratado de Fluxiones* que recullen parts de diverses seccions del llibre de Simpson, com per exemple el capítol “Adiciones al Tratado de Fluxiones”.

Finalment si comptabilitzem el nombre de fulls que ocupen els manuscrits de Cerdà i el nombre de pàgines del llibre de Simpson veurem que no hi ha coincidència. Si establim una equivalència, que no sempre es pot mantenir, entre una pàgina impresa del llibre de Simpson i un full manuscrit de Cerdà observarem que hi ha una reducció significativa de pàgines, particularment quan aquest darrer escriu la seva segona versió. Tot i que amplia algunes explicacions quan es tracta de presentar els conceptes més generals redueix el nombre de problemes i exemples en gairebé en tots els seus capítols.

De manera que, sobre els continguts que descarta Cerdà, es poden fer algunes observacions generals:

- ✓ Moltes vegades es tracta d'eliminar exemples o problemes d'una llarga llista original.
- ✓ Molts dels problemes eliminats tenen relació amb corbes mecàniques.
- ✓ Els continguts corresponents a les seccions de la segona part del llibre de Simpson són, en general, els menys modificats.
- ✓ Les 4 seccions que Cerdà obvia no fan referència pròpiament a matemàtiques sinó a la física.

Apuntem, com a detall, que en la primera versió i en alguns fulls de Cerdà apareixen uns números al marge que coincideixen amb els números de pàgina del llibre de Simpson on els continguts corresponen als dels fulls.

Tot això ens condueix a concloure que Cerdà en vol obtenir, a partir del llibre de Simpson, un altre més assequible especialment dirigit als seus deixebles. És particularment rellevant la reducció d'exemples que fa quan passa de la primera versió a la segona. La primera versió seria, en aquest cas, una reproducció més fidel del llibre de Simpson i en canvi la segona una adaptació més crítica. L'eliminació de les corbes mecàniques probablement respon a que considera aquestes corbes de més difícil comprensió, encara que no ho digui explícitament. De fet, sembla ser que el seu objectiu sigui ser més clar, més curt i més didàctic.

6.2. Les definicions generals

El que es tracta ara és de comparar els conceptes generals que tant Simpson com Cerdà utilitzen, particularment ens centrarem en el concepte de fluxió.

Les fluxions en el llibre de Simpson

En el pròleg de la versió de l'any 1750 Simpson explica amb força detall que el principal canvi entre aquesta versió i la de l'any 1737 ha estat passar de considerar les fluxions com simples velocitats – com fa Newton – a increments d'espai que serien generats uniformement en un temps donat. És molt probable que en aquest canvi tingui molt a veure Francis Blake (1708-1780)⁵⁷ el qual cita – sense donar-ne el nom – en el mateix pròleg.

Analitzem amb més detall aquesta evolució del concepte de fluxió.

Newton publica a l'any 1736 *The Method of Fluxions and Infinite Series* – tot i haver-ho escrit al 1671 – on podem llegir les seves primeres definicions de fluxió i de fluent.

Pren el temps com a quantitat a la qual totes les altres quantitats estaran referides, tot i que el seu significat sigui exclusivament instrumental. Newton anomena quantitats

⁵⁷ Francis Blake va ser durant un període de temps alumne de Thomas Simpson a Londres. Es va produir una intensa correspondència entre Blake i Simpson entorn al tema de les fluxions de 1738 a 1740, resultat de la qual va ser un petit assaig de Blake: *An Explanation of Fluxions in a short Essay on the Theory* publicat al 1741 de forma anònima.

fluents a aquelles quantitats que poden ser augmentades gradualment i indefinidament i les fluxions seran les velocitats amb què les fluents són augmentades pel moviment que les produeix⁵⁸.

Més endavant defineix el moment d'una quantitat com l'augment indefinidament petit amb el qual una quantitat creix. I el representa com el producte de la velocitat \dot{x} per una quantitat indefinidament petita de temps o : $\dot{x}o$. En totes les demostracions per tal de deduir les fluxions, efectivament substitueix x per $x + \dot{x}o$.

De manera que si vol deduir la relació que hi ha entre les fluxions de les variables x i y , relacionades elles mateixes a partir de l'equació : $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, efectua la substitució :

$$\left. \begin{aligned} &x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oo + x^3o^3 \\ &\quad - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo \\ &\quad + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo \\ &\quad - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3y^2ooy - \dot{y}^3o^3 \end{aligned} \right\} = 0$$

I després de dividir tota l'expressió per o , elimina tots els termes amb o , per considerar-los « nuls » en relació a la resta de termes, quedant-li :

$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$ que és l'equació que relaciona les fluxions de x i y respectivament⁵⁹.

Aquesta és la base sobre la qual Simpson publica el seu *A new Treatise of Fluxions* al 1737. Però al 1750 quan Simpson publica *The Doctrine and Application of fluxions*, hi ha hagut un canvi substancial. Aquest substitueix la definició de fluxió com a velocitat per la d'un increment de la variable, suposant el moviment uniforme, en un interval donat de temps. És a dir la novetat està considerar l'increment com aquell que es produiria en cas de ser el moviment uniforme, evitant d'utilitzar la velocitat i també de parlar d'infinitèsims⁶⁰.

Només començar el llibre, en la primera secció, *Of Nature, and Investigation, of Fluxions*, Simpson dona la definició de fluxió:

⁵⁸ “Now those Quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing, I shall hereafter call Fluents, or Flowing Quantities, (...) And the Velocities by which every Fluent is increased by its generating Motion, (which I may call Fluxions, or simply Velocities or Celerities) I shall represent by the same Letters pointed thus \dot{v} , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} . That is, for the Celerity of the Quantity v I shall put \dot{v} , and so for the Celerities of the other Quantities x , y , and z , I shall put \dot{x} , \dot{y} , and \dot{z} respectively.” (Newton (1736); p.20.

⁵⁹ Newton (1736); p.24.

⁶⁰ Veure Annex 4 (apèndix).

1. Per fer-se una idea de la natura de les fluxions, tota mena de magnituds seran considerades com generades per un moviment continu d'alguns dels seus límits o extrems; una línia a partir del moviment d'un punt; una superfície a partir del moviment d'una línia; i un sòlid a partir del moviment d'una superfície.
2. Cada quantitat així generada es anomenada variable, o quantitat que flueix: i la magnitud a partir de la qual qualsevol quantitat que flueix podria ser uniformement incrementada en una porció donada de temps, amb la velocitat generada en una determinada posició, o instant (si continués invariable des d'aquell moment) és la Fluxió de la quantitat citada en aquesta posició o instant.⁶¹

Continua concretant com seria la fluxió d'una línia i la d'una superfície, per passar a explicar les primeres regles per deduir les fluxions de les quantitats algebraïques: de les potències, del producte, etc.

És en la demostració geomètrica de la fluxió del producte quan podem veure les conseqüències de la nova definició de fluxió. Però, per poder comparar aquesta demostració que dona Simpson, observem, en primer lloc, la demostració leibniziana que apareix en *L'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* del Marquis de l'Hospital:

Obtenir la diferència d'un producte format per diverses quantitats multiplicades unes per les altres. 1º La diferència de xy és $ydx + xdy$. Ja que y esdevé $y+dy$ mentre x esdevé $x+dx$, i per tant xy esdevé llavors $xy+ydx+xdy+dx dy$ que és el producte de $x+dx$ per $y+dy$, i la diferència serà $ydx+xdy+dx dy$, és a dir $ydx+xdy$: ja que $dx dy$ és una quantitat infinitament petita respecte els altres membres yx i xdy .⁶²

Veiem, doncs, que al final de la demostració cal menysprear el producte $dx \cdot dy$ per ser infinitament petit.

En canvi la demostració de Simpson segueix una via molt diferent:

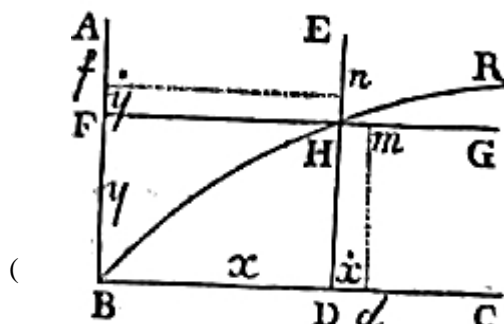
⁶¹“ 1. In Order to form a proper Idea of the Nature of Fluxions, all Kinds of Magnitudes are to be considered as generated by the *continual* Motion of some of their Bounds or Extremes; as a Line by the Motion of a Point; a Surface by Motion of a Line; and a Solid by the Motion of a Surface.

2. Every Quantity so generated is called a variable, or flowing Quantity : *And the Magnitude by which any flowing Quantity WOULD BE uniformly increased in a given Portion of Time, with the generating Celerity at any proposed Position, or Instant (was it from thence to continue invariable) is the Fluxion of the said Quantity at that Position, or Instant.*” (Simpson (1750); Part I; p. 1).

⁶² “Prendre la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres. 1º La différence de xy est $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lors x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dx dy$ qui est le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & la différence sera $ydx+xdy+dx dy$, c'est-à-dire $ydx+xdy$: puisque $dx dy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx , & xdy .” (l'Hospital (1696); Proposition II, p.4).

10. Per trobar la fluxió del producte o rectangle de dues quantitats variables.

Imaginem dues línies rectes DE i FG , perpendiculars entre elles que es mouen des de



dues altres BA i BC , contínuament paral·leles a elles mateixes i que per tant generen el rectangle DF . Sigui el rastre de la seva intersecció o el punt de l'angle H , la línia BHR ; també sigui Dd (\dot{x}) i Ff (\dot{y}) les fluxions dels costats BD (x) i BF (y), i sigui dm i fn ,

paral·lels a DH i a FH .

Llavors, ja que la fluxió de l'espai o l'àrea BDH està expressada pel rectangle Dm ($= y\dot{x}$) i que de l'àrea, o espai BFH , pel rectangle Fn , i iguals quantitats tenen iguals fluxions, es segueix que la fluxió del rectangle $xy=DF$ ($=BDH+BFH$) queda expressada per $y\dot{x} + x\dot{y}$. Q.E.I.⁶³

Efectivament la \dot{x} o la \dot{y} passen a ser increments finits de manera que la fluxió del rectangle xy serà la suma $y\dot{x} + x\dot{y}$. El terme $\dot{x}\dot{y}$ ja no apareix. No li cal justificar que aquest terme és infinitament petit. Tot es recolza en el "condicional": el canvi d'una posició a l'altra és "com si el moviment hagués estat uniforme".

Així, doncs, el raonament de l'Hospital és algebraic, fent ús dels infinitedsim, mentre que el mètode de Simpson és essencialment geomètric, evitant aquests infinitedsim.

Per altra banda, en el Scholium de la Section VII: *Of the Use of Fluxions in finding the Areas of Curves* del llibre de Simpson podem trobar una llarga disquisició⁶⁴ on aquest explica les diferències entre el Mètode de les fluxions newtonià i el Càlcul diferencial de Leibniz.

⁶³ "10.To find the Fluxion of the Product or Rectangle of two variable Quantities.

Conceive two Right-lines DE and FG , perpendicular to each other, to move, from two other Right-lines, BA and BC , continually parallel to themselves, and thereby generate the Rectangle DF . Let the Path of their Intersection, or the Loci of the Angle H , be the Line BHR ; also let Dd (\dot{x}) and Ff (\dot{y}) be the Fluxions of the Sides BD (x) and BF (y), and let dm and fn , parallel to DH and FH , be drawn. Therefore, because the Fluxion of the Space or Area BDH is truly expressed by the Rectangle Dm ($= y\dot{x}$) and that of the Area, or Space BFH , by the Rectangle Fn , and equal Quantities have equal Fluxions, it follows that the Fluxion of the Rectangle $xy=DF$ ($=BDH+BFH$) is truly expressed by $y\dot{x} + x\dot{y}$. Q.E.I." (Simpson (1750); Part I; p. 7).

⁶⁴ Veure Annex 5 (apèndix).

En primer lloc, Simpson assenyala clarament la diferència entre fluxió, com increment generat per un moviment uniforme, i l'increment infinitesimal, generat pel moviment real. Però aprofundeix més i diu que quan els increments infinitesimals són presos suficientment petits llavors la raó entre ells coincideix amb la raó de les fluxions. Observem, per tant, que aquí parla de raó de fluxions. Reconeix que el mètode dels infinitesimals té l'avantatge que no s'han d'introduir les propietats del moviment, des del moment que es raona a partir dels increments mateixos i no sobre la manera de ser generats. Però va més enllà i ens parla de la raó límit dels increments. Simpson afirma que la raó d'uns increments, que cada cop es fan més petits, convergeix, abans que (aquests increments) desapareguin, més a prop que qualsevol diferència cap a la raó de les fluxions, per tant podem identificar una amb l'altra. Llegint aquesta afirmació, ens resulta inevitable pensar amb la definició de la derivada com a límit d'un quocient d'increments. Finalment, encara que sempre ens ha estat assegurant que el mètode de les fluxions és el més precís, ens mostra com aplicar el mètode de les diferencials per deduir fluxions:

Sigui proposat determinar la raó de les fluxions de x i x^2 .

Ara, si suposem que x és augmentada per qualsevol (petita) quantitat \dot{x} , de manera que esdevé $x + \dot{x}$, el seu quadrat (x^2) quedarà augmentat a $\frac{(x + \dot{x})^2}{2} = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$; de manera que l'increment de x^2 serà $2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$; el qual és ara respecte (\dot{x}) que és l'increment de x , com $2x + \dot{x}$ és a 1.

Llavors, com la lletra \dot{x} “desapareix”, la raó s'aproxima com $2x$ és a 1, el qual és el seu límit, la raó de les fluxions quedarà llavors expressada com $2x$ és a 1, o, la qual cosa és el mateix, per $2x\dot{x}$ és a \dot{x} .⁶⁵

Què és, en definitiva, el que caracteritza la visió newtoniana? Doncs, veure les variables com quantitats “fluents”, és a dir en moviment i la fluxió com una forma de

⁶⁵ Let it be proposed to determine the Ratio of the Fluxions of x and x^2 .

Now, if x be supposed to be augmented by any (small) Quantity \dot{x} , so as to become $x + \dot{x}$, its Square (x^2) will be augmented to $\frac{(x + \dot{x})^2}{2} = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$; whence the Increment of x^2 will be $2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$; which therefore is to (\dot{x}) the Increment of x , as $2x + \dot{x}$ to 1. Hence, because the letter \dot{x} is taken, the nearer this Ratio approaches to that of $2x$ to 1, which is its *Limit*, the Ratio of the Fluxions will therefore be expressed by that of $2x$ to 1 or, which is the same, by that of $2x\dot{x}$ to \dot{x} (Simpson (1750); Part I; p. 153).

mesurar aquest moviment. El concepte de fluxió apareix de la mà de la geometria però sobre tot del moviment, de la cinemàtica. Què ha canviat des de la primera versió propera a Newton i la segona? En el cos teòric de Newton hi havia dos conceptes, el de fluxió identificada amb la velocitat i el de moment identificat amb un increment infinitament petit. En canvi en Simpson només trobem un concepte que és el de fluxió com increment (no infinitament petit) de la variable “com si la seva velocitat es mantingués constant”. Per altra part, sembla que Simpson sigui molt conscient dels avantatges i desavantatges del camí escollit per Leibniz i del escollit per Newton. Les seves idees i explicacions es podrien resumir en que si bé la visió leibniziana no s’ha de preocupar com es genera l’increment de la variable (prescindint doncs si es tracta d’un moviment uniforme o no i deslligant-se de la geometria) la definició d’infinitèsim cau en el terreny de la imprecisió. En canvi la visió newtoniana evita la noció de l’infinitèsim a costa d’una dependència de la geometria i de la cinemàtica. En aquest Scholium citat, Simpson sembla encaminar-se cap el que pot establir el lligam entre un increment “real” infinitament petit leibnizià i l’increment “ideal” uniformement generat newtonià: la idea de límit d’un quocient d’increments.

Niccolò Guicciardini en el seu llibre *The development of newtonian calculus in Britain 1700-1800*, opina que Simpson, tot i acceptar la concepció cinemàtica de Maclaurin, està avançant cap un mètode analític més proper als matemàtics continentals⁶⁶.

Les fluxions en el text de Cerdà

D’entrada la definició de fluxió en el seu primer capítol “Explicase la Naturaleza de las Fluxiones” és idèntica a la que ha adoptat Simpson :

Para comprender perfectamente el Método de las fluxiones, téngase presente que toda magnitud geométrica se reduce a Línea, Superficie o Plano y Sólido. La línea se concibe formada por el movimiento continuo de un punto que la describe, la superficie por el movimiento continuo de una línea y el sólido o cuerpo por el movimiento continuo de una superficie o plano. Aquella parte de línea, superficie o sólido que describirá el punto, línea o figura generatriz en un tiempo dado, si perseverase constante e invariable en la velocidad, que en algún punto o posición determinada

⁶⁶ Guicciardini (1989); pp. 83-84.

tiene, es la que llamamos fluxión en aquel punto de la tal cantidad que así se forma, llamada por esto fluente.

De aquí es que si el movimiento del punto, línea, figura generatriz es uniforme la fluxión será precisamente la misma o igual a la cantidad que actualmente describe el punto o figura generatriz pero si el movimiento en realidad es o acelerado o retardado, la fluxión será menor o mayor que la cantidad con que actualmente se aumenta la fluente porque la variación de celeridad que entretanto sobreviene ha de causar también una diferencia de espacio actualmente descrito respecto del que describiera si la velocidad perseverase constantemente la misma que en un punto o posición tiene y así si la velocidad es acelerada, la fluxión será menor, si retardada, la fluxión será mayor que el espacio actualmente descrito por el punto, línea o figura generatriz.⁶⁷

La fluxió continua essent l'increment de la variable si la velocitat es mantingués constant, com en el text de Simpson, però Cerdà prefereix explicar de seguida, i amb tot detall, amb quines diferències ens trobarem segons si el moviment és uniforme o accelerat o retardat. Això li permet insistir amb el caràcter “condicional” de la definició de fluxió.

Cerdà és perfectament coneixedor dels canvis introduïts per Simpson en relació a Newton i vol posar de manifest quin lligam hi ha entre les dues visions:

Siendo estas fluxiones los espacios que se describirian con movimiento uniforme, seran estas fluxiones como las velocidades por las cuales las cantidades se aumentarian en magnitud. De aquí es que algunos en vez de tomar por fluxión la magnitud que se adquiriria con la velocidad, toman la misma velocidad pero como una es proporcional a la otra, todo viene a ser lo mismo.⁶⁸

Per altra banda, en el seu primer esborrany, Cerdà explica com els alemanys, francesos i italians anomenen “diferència” el que els anglesos anomenen “fluxió” i “suma” el que els anglesos anomenen “fluent”. Per a uns serà el “Càlcul diferencial” i “Càlcul integral” i per als altres “Mètode directe de Fluxions” i el “Mètode invers de Fluxions”. Hi ha, per tant, una visió integradora per part de Cerdà que assumeix els diferents enfocaments del Càlcul.

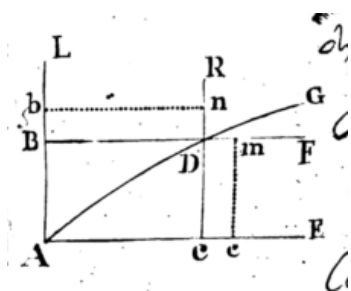
⁶⁷ Cerdà, *Tratado de Fluxiones* ; “Cap 1: Explicase la Naturaleza de las Fluxiones”. Veure Annex 6 (apèndix).

⁶⁸ Cerdà, *Tratado de Fluxiones* ; “Del Calculo diferencial e integral”.

Tot això no significa que Cerdà no tingui molt clares les diferències entre els diferents enfocaments. Hem trobat un full que no sabem exactament a quina part del *Tratado de Fluxiones* correspon però que és prou aclaridor :

En este Cálculo Diferencial se hacen las operaciones como en el Método Directo de las Fluxiones y salen los mismos resultados, aunque es forzoso confesar haber alguna diferencia entre estas infinitésimas a las que nosotros llamamos fluxiones. Hemos inculcado bastante que fluxión es el espacio o partes que describiera la figura generatriz si prosiguiese constante con el movimiento que cambia posición de la que tiene. Los que siguen el Cálculo Diferencial llaman diferencia no lo que la figura generatriz describiera sino lo que actualmente describe y así en las cantidades que se forman con movimiento uniforme lo mismo es la fluxión, que la infinitésima, por ser el mismo espacio que describiera la figura generatriz, que el que actualmente describe. Pero en las cantidades que se forman por movimiento variable no es el mismo el espacio que se describiera, que el que actualmente se describe, por aumentarse, o disminuirse en el entretanto la velocidad, y así en estos casos no es lo mismo la fluxión que la infinitésima. Siguen por lo común el método de los infinitésimos los alemanes, los italianos y los franceses, pero mirados los movimientos por una y otra parte me parece más del caso seguir el método de las fluxiones, que siguen comúnmente los ingleses con su autor Newton.⁶⁹

La forma de justificar la fluxió del producte que desenvolupa Cerdà, per prendre un exemple paradigmàtic, és idèntica a la de Simpson:



Concíbanse las líneas RC, BF que cortándose entre sí a ángulos rectos varían entrambas a un tiempo separándose paralelamente de las líneas AL y AE de manera que formando con su movimiento el rectángulo BC, el punto de

intersección D describa la línea ADG. Sea Cc (dx) fluxión de AC (x) y Bb (dz) fluxión de AB (z). Completando pues los rectángulos Cm, Bn, será Cm (fluxión de la área ACD) = CD (AB) \times Cc = zdx y Bn (fluxión de la área ADB)

⁶⁹ Cerdà, *Tratado de Fluxiones* ;capítol sense determinar.

$$= BD (AC) \times Bb = xdz, \text{ por consiguiante la fluxión de } ACD+ABD = BC = xz \\ \text{será} = zdx+xdz.^{70}$$

Per acabar d'entendre l'abast de les eines teòriques del càlcul diferencial que Cerdà pren de Simpson caldria veure-les en el seu context, és a dir comparar-les amb els pressupostos teòrics de què parteixen matemàtics contemporanis seus a Espanya, com Padilla, Wendlingen o Rieger⁷¹. La conclusió que en podríem treure és que, en definitiva, Cerdà té el seu propi criteri alhora de decidir quin serà el seu guia. Tot i que coneix l'obra de Maclaurin a partir de Pezenas a Marsella, tot i que ha pogut accedir a la de Wolff a partir de Padilla o de Wendlingen, opta per Simpson i opta per apropiarse de la definició de fluxió que aquest autor ens ofereix en el seu llibre, és a dir com l'increment de la variable que es produiria en cas de mantenir-se constant la velocitat. L'opció és clarament la newtoniana, és a dir concebre la variable com una figura en moviment, però evitant els infinitèsims. Cerdà, quan ho creurà convenient, ampliarà les seves explicacions per tal de facilitar-ne la comprensió i quan cregui que no cal allargar l'explicació la retallarà per tal de facilitar-ne la lectura. És, creiem, significatiu que mentre Simpson, després de donar la definició de fluxió passi ràpidament a explicar la regla per obtenir la fluxió de la potència d'una variable, Cerdà, en canvi, hagi optat per dividir la primera Secció del llibre de Simpson en quatre capítols diferenciats, de manera que així pugui insistir en el concepte de fluxió d'una variable.

⁷⁰ Cerdà, *Tratado de Fluxiones*; "Cap 2: Algunos problemas para encontrar las Fluxiones de las cantidades algebraicas". Observem que Cerdà utilitza dx en lloc de \dot{x} , la qual cosa comentarem en el següent apartat.

⁷¹ Padilla, en el seu *Tomo 4º del Curso Militar de Matemáticas* (1756), segueix de prop la visió donada pel leibnizià Wolff en *Elementa Matheseos Universae* (1713-1715), el qual defineix, en primer lloc, el que entén per infinitèsim i després el que entén per diferència o fluxió (Wolff (1713-1715); p. 17). Padilla recull els dos termes – fluxió i diferència – i en la seva definició el moviment també hi és present, tot i que no aprofundeix sobre les diferències conceptuals entre la fluxió newtoniana i la diferència leibniziana, com si de fet es tractés d'una diferència de notació (Padilla (1756); p. 163). En el moment d'aplicar aquest concepte es veu clarament que aplica la noció de "diferència" com d'increment infinitesimal "real".

Wendlingen, col·lega de Cerdà al Colegio Imperial, amb el seu tractat *Análisis de los infinitos*, seguint l'enfocament leibnizià, també introdueix en primer lloc els infinitèsims i després la definició de diferencial. Cita la terminologia newtoniana però, com en el cas de Padilla, es decanta per Leibniz per una qüestió de notació que analitzarem en el següent apartat. Si prenem la demostració del diferencial del producte veurem que, com Wolff o com Hospital, al final ha de descartar el producte $dx \cdot dy$ per menyspreable en relació als altres termes (Wendlingen. RAH, Cortes 9/02812).

Rieger, amb *Introducción fácil al algoritmo de las fluxiones*, en canvi, segueix la via newtoniana. Descarta utilitzar els infinitèsims i defineix fluxió tal com ho fa Simpson i Cerdà. En la demostració de la fluxió del producte, però, no aplica la definició donada i fa desaparèixer el terme $\dot{x}\dot{y}$ sense massa explicacions (Rieger. RAH, Cortes 9/02792).

6.3. La notació

Tot i que separar el tema de la notació de l'apartat dels continguts teòrics generals pot resultar perillós, ho hem fet amb l'ànim de emfatitzar un dels aspectes més originals de l'obra de Cerdà. Efectivament la notació adoptada per un determinat científic mai és una única qüestió de forma i sempre al darrera d'aquesta hi ha una determinada concepció teòrica del problema tractat. En definitiva no és una qüestió innocent.

Abans d'entrar en la qüestió principal referent a la notació, val la pena citar algunes diferències significatives entre els dos autors que acosten la notació utilitzada per Cerdà a una notació més propera a la nostra. Cerdà substitueix la barra superior sobre una expressió algebraica pel parèntesi modern. Per altra part en el problema 7 del capítol de Màxims i Mínims introdueix els símbols “<” i “>” que no hem trobat en el llibre de Simpson.

Però l'aspecte més rellevant en relació a la notació és la de la mateixa fluxió. Tal com hem anat veient, Cerdà adopta clarament la visió newtoniana lligada al moviment i el seu concepte de fluxió és idèntic al de Simpson, com increment de la variable en el supòsit que aquesta continua *variant* de forma *uniforme*. Però, com ja hem pogut observar, allà on Simpson escriu \dot{x} , Cerdà escriu dx . Aquesta característica la podem veure fins i tot en els manuscrits del seu primer esborrany. No hem trobat cap altre matemàtic de l'època que faci una cosa semblant, és a dir que, treballant amb les fluxions newtonianes, utilitzi la notació leibniziana. N'hem citat alguns: L'Hospital o Wolff, leibnizians de conceptes, utilitzen la notació diferencial. Maclaurin o Simpson, newtonians, utilitzen el puntet. I a Espanya, els que segueixen la visió leibniziana com Padilla o Wendlingen són fidels a la notació leibniziana, mentre que un newtonià com Rieger és fidel al puntet sobre la variable. I tot això resulta encara més sorprenent tenint en compte que aquests darrers són col·legues de Cerdà. També ja hem puntualitzat que tots ells coneixen l'altra visió i l'altra notació i, en alguns casos, relativitzant-ne les diferències. Per a Wendlingen el problema és la incomoditat de la utilització del puntet:

7. Los ingleses con Newton significan sus flujos con un puntito que ponen en la cabeza de la cantidad variable en esta forma \dot{x} , \dot{y} pero ya se ve que este método está expuesto a infinitos errores cuando se imprimen semejantes libros por lo cual prefiero valerme de la expresión Leibniziana.⁷²

⁷². Wendlingen. RAH, Cortes 9/2812, 9/3811.

El mateix Cerdà en parla en aquest sentit en el Capítol “De las fluxiones de cantidades algebraicas”, del seu primer esborrany:

La expresión de la fluxión de una variable expresada por sola una letra es la misma letra precedida de la letra “d”, así la fluxión o diferencia de x es dx , que quiere decir la diferencia o fluxión elemento de la variable x de la misma manera que \sqrt{x} significa la raíz de x . Los ingleses lo expresan de otra suerte, esto es por la misma letra con un punto (..) así \dot{x} es la diferencia de x pero semejante modo de expresar (...) se presta a errores de impresión⁷³ por la que facilmente (...) ⁷⁴.

I més endavant, en el capítol del primer esborrany dedicat a les Fluxions Superiors, Cerdà torna sobre aquest tema:

Los ingleses como las primeras fluxiones de las variables las expresan por la misma expresión de la variable con un punto encima (\dot{x}), las segundas las expresan con dos (\ddot{x}), las terceras con tres (\dddot{x}) etc pero este modo de expresar las fluxiones superiores cae en los mismos inconvenientes que su modo de expresar las primeras⁷⁵. Pero nosotros que expresamos las primeras de las variables simples por un “d” precediendo a la variable, expresaremos las segundas por dos “d”, de esta suerte ddx será la segunda fluxión de x , $ddd x$ será la tercera, etc. Y para abreviar expresaremos plantando a la “d” su exponente d^2x, d^3x, d^4x , etc de manera que $d^2x = ddx$, $d^3x = dddx$.⁷⁶

Aquestes reflexions ens fan pensar en la multiplicitat d'actors que podem trobar en la producció del coneixement científic i en com d'allunyada de la realitat queda la visió d'una ciència que es desenvolupa al marge d'una societat concreta en un període històric concret. En efecte, cal considerar com element rellevant per l'adopció progressiva de la notació leibniziana les exigències de la impremta.

⁷³ El subratllat és nostre.

⁷⁴ Cerdà, *Tratado de Fluxiones* ; “De las fluxiones de cantidades algebraicas”. Tot aquest paràgraf està barrat i resulta molt difícil de llegir.

⁷⁵ El subratllat és nostre.

⁷⁶ Cerdà, *Tratado de Fluxiones* ; “Cap. De las Fluxiones Superiores”.

De totes maneres la substitució per part de Cerdà de la \dot{x} per la dx , no s'hauria produït si no hi hagués hagut la comprensió d'aquests dos conceptes. La fluxió que defineix Newton s'acosta molt a la velocitat de la variable, però la que adopta Simpson és un increment. La definició de diferencial leibniziana també correspon a un increment. I, encara que Cerdà sap que no es tracta del mateix tipus d'increment, no té cap inconvenient per adoptar una notació “més pràctica” per designar un concepte de fluxió newtoniana⁷⁷.

6.4. “Resuélvanse por las Fluxiones algunos Problemas de Máximos y Mínimos”

Simpson, en la secció II : “Of the Application of Fluxions to the Solution of Problems DE MAXIMIS ET MINIMIS” del seu llibre, comença definint que entendrà per un problema de Màxims i Mínims:

22. Si una quantitat, generada per un moviment, creix, o decreix, fins arribar a una certa magnitud o posició, i després, pel contrari, decreix o creix, i s'ens demana determinar aquesta magnitud o posició, la qüestió és anomenada un problema de Màxims i Mínims.⁷⁸

A partir d'un exemple de dos punts que es mouen al llarg d'una recta il·lustra que significa un màxim o mínim i la seva condició en termes de fluxió. Ho resumeix en la següent afirmació : “... es dedueix , que la Fluxió de qualsevol variable, en el Màxim o Mínim, és igual a 0.”⁷⁹

En Cerdà a l'inici del seu capítol 5: “Resuélvanse por las Fluxiones algunos Problemas de Máximos y Mínimos” prefereix definir directament un màxim o mínim i explicita amb més detall la condició que hauran de complir aquestes posicions:

⁷⁷ Volem citar un exemple justament invers al de Cerdà. Mònica Blanco, en el seu article “Com van ser comunicades les lliçons de Jean Bernoulli sobre Càlcul Diferencial a França i a Itàlia, al segle XVIII” dins Simon; Herran (2008), ens explica que el llibre *Analyse des Infiniment Petits pour l'intelligence des courbes* (1696) del Marquis de l'Hospital, d'inspiració leibniziana, va ser traduït a l'anglès per Edmund Stone al 1730. Doncs bé aquest matemàtic fa justament el contrari de Cerdà : tradueix a notació newtoniana els conceptes leibnizians. Veure a Stone (1730); p.4.

⁷⁸ “22. If a Quantity, conceived to be generated by Motion, increases, or decreases, till it arrives at a certain Magnitude or Position, and then, on the contrary, grows lesser or greater, and it be required to determine the said Magnitude or Position, the Question is called a Problem *de Maximis & Minimis*.” (Simpson, Thomas: *The Doctrine and Application of fluxions*; 1750; Part I; p. 14).

⁷⁹ Veure Annex 7 (apèndix).

Si una cantidad que se forma por movimiento va sucesivamente creciendo hasta llegar a un cierto punto o posición, después de la cual comienza a disminuir, la tal cantidad en este punto se llama máximo(...)

Como cuando una cantidad variable llega a ser máxima ya no puede aumentarse más, su fluxión en este punto será = 0. (...) luego en aquellos puntos en que la fluxión de la variable es = 0, la tal cantidad será un máximo o un mínimo; por lo tanto encontrando la fluxión de la cantidad o igualándola a 0, en esta ecuación encontraremos el valor de la variable cuando es un máximo o un mínimo, como veremos en los problemas siguientes.⁸⁰

A partir d'aquí tant un autor com l'altre continuen amb una llista de diferents exercicis que il·lustren la teoria dels màxims i mínims. En el llibre de Simpson hi podem trobar vint-i-dos exemples i un escoli final. En canvi en el capítol sobre Màxims i Mínims del text més definitiu de Cerdà només podem trobar-ne set i en el primer esborrany n'hi havia deu. De totes maneres, després, en el capítol titulat “Adiciones al Tratado de Fluxiones” reconeixem nou problemes més que corresponen a la secció II del llibre de Simpson. Això sol ja ens fa pensar que l'objectiu pedagògic de Cerdà passa per davant d'una simple ordenació temàtica. Volem insistir, en aquest sentit, com Cerdà, a diferència de Simpson, explicita de forma clara la definició de màxim i mínim d'una variable.

De tots aquests exercicis hem escollit un per poder portar al terreny més concret la comparació entre el text de Simpson i el de Cerdà. Es tracta del problema que figura amb el número 5 a la darrera versió de Cerdà, que també apareix en el seu primer esborrany i es correspon amb l'exemple VII del llibre de Simpson.

Al llibre de Simpson apareix amb el títol : “To determine the greatest Cylinder, dg, that can be inscribed in a given Cone ADB” i en els manuscrits de Cerdà : “Encontrar el cilindro máximo MQ, que se pueda inscribir a un cono dado ADC (fig).”

⁸⁰ Cerdà, *Tratado de Fluxiones*; “Resuélvanse por las Fluxiones algunos Problemas de Máximos y Mínimos”.

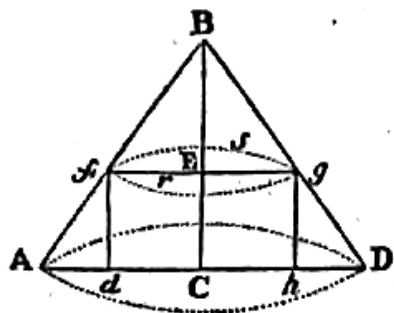
« Exemple VII

30. Determinar el màxim cilindre, dg, tal que pugui ser inscrit en un con donat ADB.

Sigui a=BC, l'altura del con;

b=AD, el diàmetre de la seva base;

x=fg (dh) el diàmetre del cilindre, considerat com variable:



$p = \left(\frac{3,14159...}{4} \right)$ l'àrea del

cercle el diàmetre del qual és la unitat.

Llavors, les àrees dels cercles essent una a l'altra com els quadrats dels seus diàmetres, tenim $1^2 : x^2 :: p : (px^2)$ l'àrea del cercle fsgr : a més, a partir de la semblança dels triangles ABC

i Adf, tenim $\frac{1}{2}b(AC) : a(BC) :: \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}x(Ad) : df = \frac{ab - ax}{b}$,

el qual multiplicat per l'àrea px^2 (trobad a abans) dóna $\frac{pabx^2 - pax^3}{b}$ el volum del cilindre : que essent un màxim, la seva

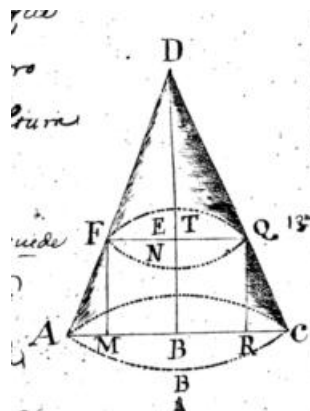
fluxió $\frac{2pabx}{b} - \frac{3pax^2}{b}$ ha de ser 0, per tant $x = \frac{2b}{3}$ i $df = \frac{a}{3}$;

De la qual cosa es veu que el cilindre inscrit serà el més gran possible, quan l'altura d'aquest sigui $\frac{1}{3}$ de l'altura de tot el con.”⁸¹

⁸¹ Simpson (1750); Part I; p. 19.

“Prob. 5. Encontrar el cilindro máximo MQ, que se pueda inscribir a un cono dado ADC (fig)

Sea su altura BD del cono dado=a, el diámetro de su base AC=b, el diámetro FQ del cilindro variable MQ =x, y sea p (=3,1416) la área de un círculo, cuyo diámetro =1, será



px^2 el área del círculo FNQE (). Siendo semejantes los triángulos ABD, AMF, será $AB:BD :: AM:MF$, esto es $\frac{1}{2}b:a :: \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}x : \frac{ab - ax}{b} = MF$, altura del cilindro inscrito, que multiplicada por px^2 , nos da el mismo cilindro inscrito $\frac{ap}{b} \times (bx^2 - x^3)$ que siendo un máximo,

tendremos la fluxión $2bxdx - 3x^2dx = 0$, de donde $2b = 3x$, $x = \frac{2}{3}b$, diámetro FQ del cilindro máximo, que

substituido en $\frac{ab - ax}{b}$, su altura nos dará $MF = \frac{1}{3}a$ y así el cilindro máximo que se puede inscribir a un cono es aquél cuyo diámetro es $\frac{2}{3}$ del diámetro de la base del cono y cuya altura es $\frac{1}{3}$ de la del cono mismo.”⁸²

⁸² Cerdà, *Tratado de Fluxiones*; “Aplicación de las Fluxiones para la resolución de los problemas de Máximo o Mínimo”.

A primer cop d'ull sembla que els exercicis siguin pràcticament idèntics. Però, veiem-ne algunes diferències.

En Cerdà té un error quan diu que $p=3,1416$ ja que tal com escriu Simpson és $\frac{3,14159}{4}$, però aquest error no afecta al resultat.

Cerdà utilitza la notació de diferencial mentre que Simpson utilitza el punt.

El càlcul final demostra una major agilitat en el cas de Cerdà, utilitzant factors comuns.

I, per altra part, Cerdà vol explicitar molt més els passos del càlcul algebraic.

Efectivament Simpson escriu com a volum del cilindre l'expressió $\frac{pabx^2 - pax^3}{b}$,

mentre que Cerdà l'escriu $\frac{ap}{b} \times (bx^2 - x^3)$. Això fa que Simpson hagi de resoldre

l'equació: $\frac{2pabx\dot{x}}{b} - \frac{3pax^2\dot{x}}{b} = 0$, mentre que Cerdà, descartant el factor comú

constant, arriba a l'equació: $2bxdx - 3x^2dx = 0$. Tot i així Simpson escriu directament

les solucions $x = \frac{2b}{3}$ i $df = \frac{a}{3}$ i en canvi Cerdà encara escriu un pas intermedi :

$2b = 3x$, abans d'escriure la solució : $x = \frac{2}{3}b$ i explica com trobar l'altura MF, és a dir

substituint el diàmetre x trobat en l'expressió $\frac{ab - ax}{b}$ anteriorment deduïda que

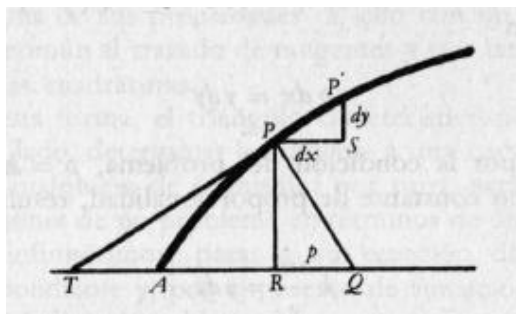
finalment dona com resultat $MF = \frac{1}{3}a$.

Tot plegat semblen diferències mínimes però que ens estan indicant el propòsit eminentment didàctic de Cerdà.

6.5. “Explicase el método de tirar las tangentes a las curvas por medio de las fluxiones”

A l'any 1659 Pascal publica el *Traité des sinus des quarts de cercle*. En aquest tractat apareix el que posteriorment s'ha anomenat triangle característic. Pascal establirà la semblança entre un triangle rectangle infinitament petit que té per hipotenusa la tangent a un cercle en un determinat punt i un triangle rectangle finit que té per hipotenusa el

radi del cercle. I diu que per a triangles petits es pot substituir l'arc de corba per la tangent.



Leibniz, anys més tard, generalitza el cercle a qualsevol corba i utilitza les diferencials de les variables per deduir-ne la relació amb la subnormal : $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{y}$, on $p=RQ$ (subnormal) i

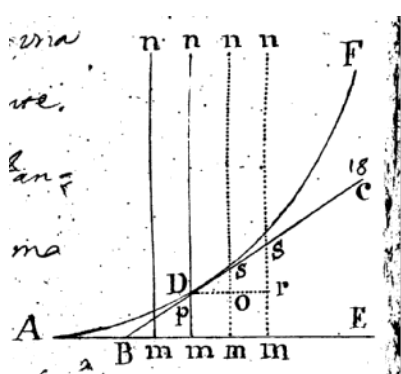
$y=PR$. Ha començat el càlcul diferencial

aplicat a la determinació de tangents a corbes . Mentre Newton també utilitzava el triangle característic per calcular la subtangent a partir de les fluxions de les variables.

Veiem com arriba aquest càlcul a mans de Cerdà.

El capítol del *Tratado de Fluxiones* de Cerdà dedicat a les tangents comença amb una explicació de com calcular la subtangent a una corba en un punt donat. El raonament de Cerdà és d'alguna manera invers al que avui dia seguiríem. Construeix una recta que passa per un punt d'una corba a partir de les fluxions de les dues variables. Raona que mentre el moviment fos uniforme el punt es mouria sobre aquesta recta. Per acabar dient que si el moviment és accelerat la corba quedarà per sobre la recta i si és retardat la corba quedarà per sota. En qualsevol cas la recta dibuixada a partir de les fluxions és una recta tangent a la corba en el punt donat⁸³.

Llavors dedueix la subtangent a partir d'una proporcionalitat de triangles:



Ahora pues los triángulos SrD, DmB son semejantes, luego Sr: rD :: Dm : mB, esto es, puesta la ordenada Dm=y, la abscisa Am=x; dy :

$dx :: y : \frac{ydx}{dy} = mB$ subtangente; por lo tanto la

subtangente (especialmente en la curva cuyas abscisas terminadas en el eje) siempre es una cuarta proporcional a la fluxión de la ordenada a

la de la abscisa y a la ordenada terminada al punto de contacto.⁸⁴

⁸³ Veure Annex 8 (apèndix).

⁸⁴ Cerdà, *Tratado de Fluxiones*; "Cap. 6 : Explicase el método de tirar las tangentes a las curvas por medio de las fluxiones".

L'explicació i el raonament anteriors ja els podem trobar en la "Secció 3 : L'ús de les fluxions per dibuixar tangents a les corbes" del llibre de Simpson⁸⁵.

Tant en el text de Cerdà com en el llibre de Simpson, després de les introduccions generals respectives, tenim una sèrie d'exercicis. Simpson mostra dotze exemples i Cerdà, en el seu primer esborrany, en recull deu i dos més queden inclosos en el capítol posterior "Adiciones al Tratado de Fluxiones". Però en la segona versió, Cerdà només recull quatre problemes. Els exemples que bàsicament Cerdà ha descartat, en la segona versió, són els relatius a corbes mecàniques. Tal com ja hem avançat a l'apartat "1. Els continguts teòrics generals", creiem que el motiu és essencialment didàctic. Probablement Cerdà considerava que el tema de les corbes mecàniques no era tant important per als seus alumnes, més interessats en l'aplicació "pràctica" del càlcul.

Per tal de veure amb més detall els dos textos analitzarem el primer problema de Cerdà que correspon al primer exemple de Simpson⁸⁶.

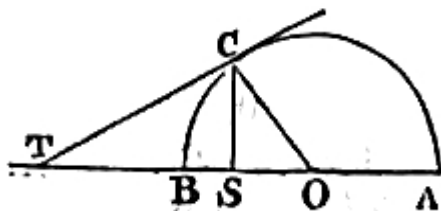
Com podem comprovar no hi ha massa diferències entre el desenvolupament d'un i de l'altre. Tornarem a subratllar les diferències de notació i un altre detall rellevant: tot i que les figures sempre són molt semblants, en gairebé cap cas utilitza les mateixes lletres. Aquí caldria afegir també les diferències en la forma de concloure l'exercici. En Simpson vol insistir en que el resultat coincideix amb el que s'obtingria a partir de les propietats del triangle rectangle OCT. Mentre que Cerdà prefereix expressar la subtangent en funció només de la variable x . Sembla que en aquesta manera d'acabar, a diferència de l'anglès, que continua recolzant-se en la geometria com a garantia d'uns resultats correctes, el català vulgui arribar a un resultat algebraic més dirigit a l'aplicació pràctica.

⁸⁵ Veure Annex 9 (apèndix).

⁸⁶ Veure la pàgina següent.

50. Dibuixar una línia recta CT, que toqui a un cercle donat BCA, en un punt donat C.

Sigui CS perpendicular al diàmetre AB i sigui AB=a, BS=x i SC=y; llavors, per la propietat del cercle,



$$y^2 (CS^2) = BS \times AS (= x \times \overline{a-x}) = ax - x^2$$

I si calculem la fluxió, per tal de determinar la raó entre \dot{x} i \dot{y} , tenim $2y\dot{y} = a\dot{x} - 2x\dot{x}$; en conseqüència

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x}; \text{ la qual multiplicada per } y, \text{ dóna}$$

$$\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a-x} = \text{la subtangent ST. D'on (suposant O com centre)}$$

tenim $OS \left(\frac{1}{2}a-x \right) : CS (y) :: CS (y) : ST$, la qual cosa també sabem a partir d'altres principis.⁸⁷

⁸⁷ Simpson (1750); Part I; p. 54.

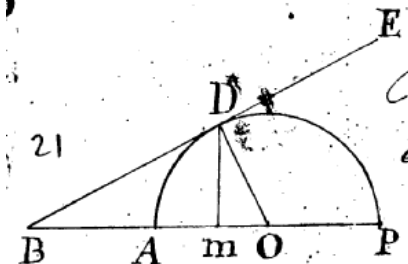
Prob 1 Tirar una tangente BE al punto D del círculo ADP (fig)

Sea Dm la perpendicular tirada desde el punto dado D al eje o diámetro AP. Haciendo pues el diámetro AP=a, su parte o abscisa correspondiente Am=x y la perpendicular o ordenada Dm=y, por la propiedad del círculo tendremos $Dm^2 = Am \times mP$, esto es $y^2 = ax - x^2$, cuya fluxión $2ydy = adx - 2xdx$ nos dará

$$dx = \frac{2y}{a-2x} \times dy, \quad \text{por}$$

consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$, que multiplicado por y será

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a-x} = \frac{a-x}{\frac{1}{2}a-x} \times x. \quad ^{88}$$



⁸⁸ Cerdà, *Tratado de Fluxiones*; "Explicase el método de tirar las tangentes a las curvas por medio de las fluxiones".

7. Conclusions

Els nostres objectius en aquest treball anaven en la línia d'entendre millor el paper de Cerdà, com a “introductor” del càlcul diferencial a Espanya. Per tant les primeres preguntes a resoldre, en aquesta recerca, anaven enfocades cap esbrinar amb la màxima precisió possible quines eren les aportacions de Cerdà amb el seu *Tratado de Fluxiones* i quina relació calia establir entre aquest text i l'obra de Simpson. Però també hem anat acumulant altres i diverses preguntes al voltant de les primeres, com el per què Cerdà va triar l'obra de Simpson com a guia del seu treball sobre càlcul diferencial i integral o qüestions com la de quins nous elements el cas de Cerdà podia aportar en temes més generals i/o més polèmics relacionats amb la naturalesa del coneixement científic, amb la seva producció i amb la seva divulgació. Intentarem resumir les primeres respostes que hem pogut avançar.

Què representen els manuscrits agrupats com “Tratado de Fluxiones” de Cerdà?

- Els manuscrits són una adaptació del llibre de Simpson *The Doctrine and Application of fluxions*. Això significa que no són una simple traducció, sinó que Cerdà efectua una selecció a partir del llibre de Simpson i afegeix fragments que són originals d'ell mateix. Com ja hem mostrat, Cerdà exclou tot allò que fa referència a corbes mecàniques i evita els exemples que són generalitzacions d'altres. A més Cerdà s'estén en allò que creu que facilita la comprensió d'un concepte o en l'aplicació correcta d'una determinada regla, la qual cosa no sempre es troba a l'obra de Simpson. Per exemple s'estén en la definició de fluxió o en la d'un extrem relatiu d'una variable.
- Cerdà, que ha escollit com a guia Simpson, es situa clarament en la línia newtoniana, és a dir veu les variables com quantitats “fluents”, en moviment, i la fluxió com una forma de mesurar aquest moviment, de manera que el concepte de fluxió s'explica a partir de la geometria i de la cinemàtica. Però, en determinades demostracions, com la que hem analitzat dins el capítol “Explicase el método de tirar las tangentes a las curvas por medio de las fluxiones”, Cerdà sembla adoptar una posició més “algebraica” i menys “geomètrica”, diferenciant-se, en aquestes ocasions, de Simpson.

- Una de les “adaptacions” més rellevant és l’adopció de la notació leibniziana, tenint en compte que l’obra de Cerdà es mou bàsicament sota una visió newtoniana. Això ens fa pensar que Cerdà, que ha optat per la perspectiva newtoniana de Simpson, probablement per evitar discussions “metafísiques” sobre les quantitats infinitesimals, reconeix, en canvi, la millor simplicitat i operativitat de la notació leibniziana.
- Podem concloure que Cerdà volia imprimir els seus manuscrits i per tant fer-ne d’ells un llibre de text, com els que ja havia publicat. Per a ell el llibre de text era fonamental per a consolidar una disciplina, poc coneguda encara a Espanya, segons el seu punt de vista. I a més a més era important publicar-ho en castellà, ja que el públic a qui anava dirigit era molt més ampli que l’ estrictament noble i culte.
- Creiem que el principal objectiu que mou a Cerdà és l’ensenyament. Aquests manuscrits estan enfocats per a que serveixin per a ensenyar el nou càlcul als joves, tant com apunts provisionals com després en forma de manual. En general, doncs, podem concloure que l’adaptació que fa Cerdà va en el sentit de fer el més didàctic possible el seu “Tratado”.

Per què Cerdà opta per Simpson?

Simpson és un ensenyant com Cerdà i el propòsit de Simpson també és ser el més pedagògic possible. Simpson ha estat dels primers que, després de la polèmica amb Berkeley, ha optat per una nova definició de fluxió que eviti els infinitesimals. El seu tractat manté una coherència amb aquesta definició i està estructurat d’una forma clara i concisa. Aquesta és, al nostre entendre, la raó fonamental que Cerdà té per optar per Simpson. Ens podíem haver preguntat com és que Cerdà, que havia estat aprenent el càlcul diferencial al costat de Pezenas, traductor de Maclaurin, no havia pres com a guia l’obra d’aquest altre autor anglès. La resposta, creiem, és senzilla. L’obra de Maclaurin no va dirigida a l’ensenyament de la nova disciplina sinó a donar una major consistència i solidesa teòriques a aquesta. Cerdà sembla que prefereix seguir a un autor ensenyant, com ell, que a partir de definicions clares ofereix molts exemples de les aplicacions del càlcul diferencial i integral.

Però, a més, creiem que també juga a favor de Simpson la seva vessant lleugerament “pro-continental”, la seva certa inclinació a valorar el desenvolupament més algebraic dels leibnizians. Cerdà, per altra part, no farà més que accentuar-ne aquesta vessant.

Quin paper juguen les aportacions de Cerdà en la producció del coneixement científic?

Només apuntarem alguns elements que hem recollit a partir de l'estudi de part de l'obra de Cerdà, i en molts casos encara en forma de preguntes obertes.

- La primera constatació és que, particularment a l'època de Cerdà i especialment en una disciplina naixent com la del càlcul diferencial i integral, la teoria científica està ben lluny de ser un cos tancat i acabat. En qualsevol definició o proposició represes per algun autor a partir d'un altre s'introdueixen nous matisos. La formació, per tant, d'una disciplina apareix com una obra realment col·lectiva, on no sempre és fàcil identificar l'element original de cada actor.
- L'altra constatació és la intervenció de múltiples factors socials, no sempre reconeguts, en el mateix cor del discurs més teòric d'una disciplina com la del càlcul diferencial. No hi ha una clara influència ideològica en la deriva que pren el desenvolupament newtonià de les fluxions, a partir de la intervenció de Berkeley? No és aquesta pressió ideològica que actua sobre Cerdà alhora de descartar els leibnizians com per exemple l'Hospital? En un altre ordre de coses, durant la nostra recerca ha aparegut el pes dels editors alhora d'adoptar una notació o una altra – l'adopció de la notació leibniziana en contra de la newtoniana. Fins a quin punt la pròpia dinàmica d'una impremta no condiciona decisions tant fonamentals com l'adopció d'una determinada notació?
- Finalment Cerdà, com altres ensenyants i/o divulgadors, realment participa en el procés de producció de coneixement científic? Creiem que la resposta està molt associada a una visió d'aquesta producció com empresa col·lectiva, on els actors són diversos i de vegades fins i tot externs a la comunitat científica i on les diferències entre productor i divulgador queden difuminades. L'interès d'estudiar un actor no és tant per buscar l'excel·lència d'aquest sinó sobre tot descobrir els lligams d'aquest amb tots els altres actors i així entendre millor tot el procés històric de producció-divulgació científiques com una unitat. La tasca d'adaptar els nous conceptes del càlcul diferencial i integral a un llenguatge planer i a la vegada rigorós, fent una opció de quin és el millor guia però també

de com millorar-lo és per si sola una manera clara de participar en la configuració de la disciplina en el nostre país. Ens volem referir aquí molt especialment a l'opció decidida per part de Cerdà de prendre com idea vertebradora del seu "Tratado" el concepte de fluxió de Simpson, definició clara i que l'autor manté de forma coherent durant tot el seu discurs.

- Cerdà no era un personatge desconegut per altres historiadors de la ciència. Fins i tot l'estudi sobre la seva aportació a la introducció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII no era una novetat quan vam iniciar la nostra investigació. I gràcies a tot aquest treball previ hem pogut emprendre el nostre. Però potser calia enfocar l'aportació de Cerdà, abandonant definitivament els complexos d'estar tractant amb un personatge de segona fila, amb un simple divulgador o ensenyant i reivindicar, com hem fet al llarg d'aquest treball, en els manuscrits d'aquest personatge la immensa tasca enfocada cap a la formació dels seus deixebles com una manera de participar en primera línia en el complex procés de la producció de coneixement científic.

Moltes altres preguntes que han anat sorgint durant la nostra recerca s'han quedat, de moment, sense resposta, esperant una propera ocasió. D'entrada continua obert l'aprofundiment de l'aportació teòrica de Cerdà com "apropiador" de l'obra de Simpson. Així com l'estudi d'altres obres del mateix Cerdà. Però també altres interrogants se'ns han plantejat, com el de quin tipus "d'instrucció" va rebre a Marsella al costat de Pezenas o com el de la relació amb els seus alumnes, particularment a Barcelona durant els nou anys d'ensenyament; qui eren aquests i en quines institucions els trobem posteriorment. Particularment interessant seria estudiar els lligams d'antics alumnes de Cerdà amb la futura Reial Acadèmia de les Ciències i les Arts de Barcelona i també els lligams que podia haver mantingut Cerdà amb la Reial Acadèmia Militar de Matemàtiques. Igualment ens resulta especialment interessant estudiar l'aportació de Cerdà en un context més ampli de la història del llibre de text a Espanya i el paper dels editors i la seva influència sobre les publicacions científiques. Un altre tema que ha despertat el nostre interès és descobrir si Cerdà va continuar treballant com ensenyant o va continuar escrivint durant els darrers 24 anys de la seva vida a Itàlia. I finalment una altra línia d'investigació aniria cap a estudiar la continuïtat de l'aportació de Cerdà a partir d'ensenyants i/o matemàtics posteriors. Totes aquestes preguntes, entre altres, queden, doncs, obertes a possibles posteriors recerques.

8. Agraïments

Volem agrair, en primer lloc, la col·laboració que en tot moment ens ha ofert en Lluís Gassiot Matas alhora d'orientar-nos cap a quins recursos havíem de dirigir-nos. De la mateixa manera volem agrair els consells sempre ben rebuts dels professors Santiago Garma Pons i Antoni Roca Rossell així com els de Manuel García Doncel i Josep M^a Benítez i Riera. Un agraïment especial per a tot el personal de biblioteca de totes les institucions on hem efectuat consultes, sense excepció, que sempre ens han facilitat la nostra tasca. Naturalment un altre particular agraïment a tots els membres del CEHIC i a tots el professorat del Màster en Història de la Ciència, que sempre ens han animat en el nostre treball, així com a tots els membres del recent grup XEHC (Xerrades d'estudiants de Història de la Ciència) que han estat sempre uns incondicionals defensors de la nostra recerca. I, com no podia ser d'una altra manera, un molt particular agraïment a la persona que sempre ha vetllat, amb paciència, per a que el nostre treball mantingués el rigor i la coherència imprescindibles, és a dir a la nostra directora M^a Rosa Massa Esteve.

9. Fonts i bibliografia

Entitats on s'han efectuat consultes

Real Academia de Historia de Madrid (RAH)
Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (RACAB)
Archivum Romanum Societatis Iesu (ARSI)
Biblioteques de les Universitats de Catalunya (CCUC)

Fonts manuscrites

Cerdà, Tomàs, *Carta de Cerdà a Simpson*. Barcelona 1758. RAH, Cortes 9/2892. Transcrita en Gassiot (1996) i traduïda al castellà en Hernández Alonso (1985).

Cerdà, Tomàs, *Article de Cerdà sobre Barcelona*. RAH, Cortes 9/2892.

Cerdà, Tomàs, *Llistes de llibres científics preparades per Cerdà i esborranys de comandes d'alguns d'ells*. RAH, Cortes 9/2892.

Cerdà, Tomàs, *Elementos Generales de Mechanica*. RAH, Cortes 9/2788.

Cerdà, Tomàs, *Tratado de Fluxiones*. RAH, Cortes 9/2792, 9/2812, 9/2793, 9/2813.

Rieger, Christian, *Introducción fácil al algoritmo de las fluxiones*. RAH, Cortes 9/2792.

Wendlingen, Johannes, *Análisis de los infinitos*. RAH, Cortes 9/2812, 9/3811.

Fonts primàries

Blake, Francis (1741), *An Explanation of Fluxions in a short Essay on the Theory*. London: Printed for W. Innys.

Cerdà, Tomàs (1758), *Liciones de Mathematica o Elementos Generales de Arithmetica y Algebra para el uso de la clase*. (2 tomos). Barcelona 1758, por Francisco Surià.

Cerdà, Tomàs (1760), *Lecciones de mathematica o Elementos generales de Geometria para el uso de la clase*. Barcelona 1760, por Francisco Surià.

Cerdà, Tomàs (1764), *Leccion de Artilleria para el uso de la clase*. Barcelona 1764, por Francisco Surià.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1684-1686), *Análisis Infinitesimal*. Estudio preliminar de Javier de Lorenzo. Traducción de Teresa Martín Santos. Madrid, Tecnos, 1987. Títols originals : *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec*

fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus (1684).
De geometria recondita et Analysi indivibilium atque infinitorum (1686).

Maclaurin, Colin (1742), *The Elements of the Method of Fluxions, demonstrated after the Manner of Ancient Geometricians*. Edimburg.

L'Hospital, Marquis de (1696), *L'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*. A Paris, de l'Imprimerie Royale.

Newton, Isaac (1736), *The Method of Fluxions and Infinite Series*. London, printed by Henry Woodfall.

Newton, Isaac (1686), *Principios matemáticos de la filosofía Natural y su sistema del mundo*. (Títol original : *Philosophiae naturalis Principia Mathematica*. Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Praeses. Londini, 1686.) Edició preparada per Antonio Escohotado. Editora Nacional. Madrid, 1982.

Owen, William; Johnston, William (editors) (1784), *A New and General Biographical Dictionary*. (A New Edition, in Twelve Volumes). (Former Edition in 1761). London.

Padilla y Arcos, Pedro (1756), *Curso militar de Mathematicas, sobre las partes de esas Ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra*. Madrid, Antonio Marín.

Rondet, M. (1735), *Analise des Infiniments petits, comprenant Le Calcul Integral dans toute son étenduë*. Paris.

Simpson, Thomas F.R.S.(1750), *The Doctrine and Application of Fluxions*. London, printed by J. Nourse.

Stone, Edmund (1730), *The Method of Fluxions both Direct and Inverse. The Former being A Translation from the Celebrated Marquis De L'Hospital's Analyse des Infiniments Petits : And the Latter Supply'd by the Translator, E. Stone, F.R.S*. London.

Wolff, Christian (1713-1715), *Elementa Matheseos Universae*. Genevae : apud Henricum-Albertum Gosse & socios.

Fonts secundàries

Agustí i Cullell, Jaume (1983), *Ciència i tècnica a Catalunya en el segle XVIII: la introducció a la màquina de vapor*. Barcelona: Institut d'estudis Catalans.

Ausejo, Elena; Medrano Sánchez, Francisco Javier (2010), "Construyendo la Modernidad: Nuevos datos y enfoques sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España (1717-1787)", *Llull*, Vol 33 (Nº 71) 1er semestre; pp 25-56.

Barca i Salom, Francesc X. (1992), "La Càtedra de Matemàtiques de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona" en les *II trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Peñíscola.

Benítez i Riera, Josep M^a (1988), *La contribució intel·lectual dels jesuïtes a la Universitat de Cervera*.Tesi doctoral a la Universitat de Barcelona.

Benítez i Riera, Josep M. (1996), *Jesuïtes i Catalunya : fets i figures*. Publicació Barcelona : Abadia de Montserrat.

Blanco Abellán, Mónica (2004), *Hermenèutica del càlcul diferencial a l'Europa del segle XVIII: de l'Analyse des infiniment petits de L'Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802)*. Tesi doctoral dirigida per Josep Pla i Carrera dins del Programa Interuniversitari de Doctorat d'Història de les Ciències (UAB-UB), coordinat pel CEHIC.Universitat Autònoma de Barcelona.

Blanco Abellán, Mònica (2008), “Com van ser comunicades les lliçons de Jean Bernoulli sobre Càlcul Diferencial a França i a Itàlia, al segle XVIII” dins Simon; Herran (2008).

Bofill i Poch, Antoni (1915), *Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona (1764-1914). Fiestas científicas celebradas con motivo del CL aniversario de su fundación*. Barcelona; Sobrinos de López Robert y Cia.

Bruneau, Olivier (2011), *Colin Maclaurin ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien*. Presses Universitaires de Nancy.

Capel, Horacio (2004-2007), “L'Acadèmia de Matemàtiques de Barcelona i els enginyers militars a Catalunya” dins Vernet; Parés (2004-2007).

Capel, Horacio; Sánchez, Joan Eugeni ; Moncada, Omar (1988), *De Palas a Minerva : la formación científica y la estructura institucional de los ingenieros militares en el siglo XVIII*. Barcelona: Serbal; Madrid: CSIC.

Cuesta Dutari, Norberto (1974), *El Maestro Juan Justo García*. Universidad de Salamanca.

Cuesta Dutari, Noberto (1985), *Historia de la Invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca.

De Mora, Marisol; Massa Esteve, Maria-Rosa (2010), “On Pedro de Lucuce's Mathematical Course: Sources and Influences”, en Proceedings of the *Third ICESHS*, Austrian Academy of Sciences, Vienna; pp. 835-844.

Edwards, Charles Henry (1979), “The calculus according to Leibniz” dins *The historical development of the calculus*. New York, Springer.

García Doncel, Manuel; Martínez Vidal, Àlvar ; Nieto-Galan, Agustí i Pardo Tomàs, Josep (2004-2007), “Les noves institucions il·lustrades” dins Vernet; Parés (2004-2007).

García-Doncel, Manuel; Gassiot Matas, Xavier (2000), “Els orígens fundacionals” dins Nieto; Roca (2000).

Garma Pons, Santiago (1978), “Producción matemática y cambios en el sistema productivo en la España de finales del siglo XVIII” dins *Homenaje a Julio Caro Baroja* / coord. per Manuel Gutiérrez Esteve, Jesús Antonio Cid Martínez, Antonio Carreira, Madrid.

Garma Pons, Santiago (1980), “Los matemáticos españoles y la historia de las Matemáticas del siglo XVII al siglo XIX” dins Garma Pons, Santiago (Ed.) *El científico ante su Historia. La ciencia en España entre 1750-1850*. Madrid, Diputación Provincial de Madrid; pp. 59-72.

Garma Pons, Santiago (1988), “Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX” dins Sánchez Ron, José Manuel (Ed.) *Ciencia y sociedad en España*. Madrid, ediciones El Arquero/CSIC; pp. 93-127.

Garma Pons, Santiago (1994), *Josep Chaix i el Progrés matemàtic a principis del segle XIX*. València, Conselleria d'Educació i Ciència, Consell Valencià de Cultura.

Garma Pons, Santiago (2002), “La Enseñanza de las Matemáticas” dins Peset Reig, José Luis (dir.) *Historia de la Ciencia y de la Técnica en la Corona de Castilla*. Salamanca, Junta de Castilla y León, vol IV.

Gassiot Matas, Lluís (1995), “El P. Tomàs Cerdà S.J. i la introducció del pensament newtonià a Barcelona” en *Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica (III)*. Tarragona, 1994. (Actes III. Barcelona: SNCT, 1995. pp. 247-51).

Gassiot Matas, Lluís (1996), *Tomas Cerdà i el seu “Tratado de Astronomia”* Treball de recerca del Centre d'estudis d'Història de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona dirigit per Manuel García Doncel, Bellaterra.

Gillies, Donald (1992), *Revolutions in mathematics*. Oxford.

Gillispie, Charles Coulston (editor) (1981), *Dictionary of scientific biography(DSB)*. New York.

Giorello, Giulio (1992), “The ‘fine structure’ of mathematical revolutions: metaphysics, legitimacy, and rigour. The case of the calculus from Newton to Berkeley and Maclaurin” dins Gillies (1992).

Grattan-Guinness, I. (1984), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. (Títol original: *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*, 1980). Versió espanyola de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial. Madrid.

Grosholz, Emily (1992), “Was Leibniz a mathematical revolutionary?” dins Gillies (1992).

Guicciardini, Niccolò (1989), *The development of newtonian calculus in Britain 1700-1800*. Cambridge University Press.

Hall, A. Rupert (1980), *Philosophers at war: the quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge University Press.

Hernández Alonso, Eulogio (1985)⁸⁹, *El jesuita Tomás Cerdá y la introducción del cálculo infinitesimal en España*. Treball inèdit, còpia al Seminari d'Història de les Ciències del Centre Borja de Sant Cugat.

Hofmann, Joseph E, (1974), *Leibniz in Paris. 1672-1676*. Cambridge University Press. (Traducció a l'anglès de la versió original, *Die Entwicklungsgeschichte der Leinnizschen Mathematik während des Aufenthalts in Paris. 1672-1676*. Munich.1949).

Iglésies i Fort, Josep (1964), *La Real Academia de Ciencias Naturales y Artes en el siglo XVIII*. Barcelona : Real Academia de Ciencias y Artes.

López Piñero, José M.(1969), *La introducción de la ciencia moderna en España*, Barcelona.

López-Piñero, José M.; F. Glick, Thomas; Navarro Brotóns, Víctor; Portela Marco, Eugenio (2001), *Diccionario histórico de la ciencia moderna en España (DHCME)*, 2 vols. Barcelona : Península.

Massa Esteve, María Rosa (1998), *Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625-1686): taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète*. Tesis doctoral dirigida por Antoni Malet Tomas. Universitat Autònoma de Barcelona.

Massa Esteve, Maria Rosa (2006), "L'Acadèmia de Matemàtiques de Barcelona (1720-1803) i els enginyers militars espanyols", *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, VII; pp. 299-307.

Massa Esteve, M^a Rosa; Roca Rosell, Antoni; Puig Pla, Carles (2011, en premsa), "Mixed" *Mathematics in Engineering Education in Spain. Pedro Lucuce's course at the Royal Military Academy of Mathematics of Barcelona in the Eighteenth century*. Acceptat per publicar a Engineering Studies.

Navarro Brotóns, Víctor (1977), *La revolución científica en España : Tradición y renovación en las ciencias físico-matemáticas*. Tesis doctoral Universitat de València.

Navarro Brotóns, Víctor (2001), "Scientific activity in Spain and the Role of the Jesuits (1680-1767)" dins Brizzi, Gian Paolo e Greci, Roberto *Gesuiti e Università in Europa (secoli XVI-XVIII)*. Arti del Convegno di studi, Parma.

Navarro Brotóns, Víctor (2003), "Tradition and Scientific Change in Early Modern Spain: The Role of the Jesuits" dins Feingold, Mordechai, ed., *Jesuit Science and the Republic of Letters*. Londres, The MIT Press.

⁸⁹ L'autor del treball ha associat l'any 1985 al treball inèdit de Hernández Alonso degut aquest és l'any de publicació del llibre de Cuesta Dutari *Historia de la Invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España* on justament es parla del treball de Hernández Alonso.

Navarro Brotóns, Víctor ; Puig Pla, Carles (2004-2007), “Contribucions al procés de modernització científica: físics, astrònoms i matemàtics” dins Vernet; Parés (2004-2007).

Nieto Galán, Agustí i Roca Rosell, Antoni (2000), *La Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona als segles XVIII i XIX: història, ciència i societat*. Barcelona, Institut d'Estudis Catalans.

Paty, Michel (1994), “Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques à la physique” dins Garma, Santiago; Flament, Dominique; Navarro, Victor (eds.), *Contra los titanes de la rutina.- Contre les titans de la routine*. Comunidad de Madrid/C.S.I.C., Madrid; pp. 401-428.

Puig Pla, Carles (2006), *Física, Tècnica i Il·lustració a Catalunya. La cultura de la utilitat: assimilar, divulgar, aprofitar*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Roca Rosell, Antoni i altres (2007), “The Military Academy for Mathematics of Barcelona (1720) and its role in the history of engineering in Spain”, en *Proceeding of the 2nd International Conference of the European Society for the History of Science (ICESHS)*. Cracow; pp. 701-704.

Romano, Antonella (1999), *La Contre-réforme mathématique : constitution et diffusion d'une culture mathématique jésuite à la Renaissance (1540-1640)*. École française de Rome.

Secord, James (2004), “Knowledge in Transit”, *Isis* 95; pp. 654-672.

Sellés, Manuel ; **Peset**, José Luis y Lafuente, Antonio (1988), *Carlos III y la ciencia de la Ilustración*. Madrid, Alianza Editorial.

Sempere Guarinos, Juan (1785-1789), *Ensayo de una biblioteca española de los mejores escritores del reinado de Carlos III*. Madrid : en la Imprenta Real.

Simón Díaz, José (1952), *Historia del Colegio Imperial de Madrid*, Madrid.

Simon, Josep; Herran, Néstor (2008); with Lanuza-Navarro, Tayra, Ruiz-Castell, Pedro and Guillem-Llobat, Ximo, *Beyond Borders: Fresh Perspectives in History of Science*. Cambridge Scholars Publishing.

Sommervogel, Carlos (2008), *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus/ première partie: bibliographie par les Pères Augustin et Aloys de Backer et seconde partie: histoire par le Père Auguste Carayon*. [Recurs electrònic]. Saint-Cloud:LACF Éditions, cop. 2008. (Publicat originalment a Bruxelles: O. Schepens; Paris: A. Picard, 1890-1916).

Udías, S.J., Agustín (2005), "Los libros y manuscritos de los profesores de matemáticas del colegio imperial de Madrid, 1627-1767", *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 148, a. LXXIV; p. 369.

Udias, S.J., Agustín (2010), " Profesores de matemáticas en los colegios de la Compañía de España, 1620-1767", *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 157, a. LXXIX ; p. 3.

Ventura, Montserrat (1999), "El Col·legi de Cordelles sense els jesuïtes, un projecte fracassat" dins Martínez Shaw, Carlos : *Historia moderna, historia en construcció. Economia, Mentalidades y Cultura. Congreso del Centre d'estudis d'Història Moderna "Pierre Vilar" (Barcelona, 1996)*. Lleida.

Vernet, Joan i Parés, Ramón (2004-2007), *La ciència en la Història dels Països catalans*. València : Institut d'Estudis catalans.

Vernet, Joan (1975), *Historia de la ciencia española*. Madrid.

10. Apèndix

Annex 1 :	59
Cerdà, Tomàs (1758), <i>Esborrany de carta a Thomas Simpson</i> . [RAH Cortes 9/02792. Traducció al castellà de la carta original pel professor Castressana que es troba a Hernández Alonso (1985); cap VII.	60
Annex 2	61
Simpson, Thomas (1750), <i>The Doctrine and Application of fluxions. Containing (Besides what is common on the subject) a number of new improvements in the theory and the solution of a variety of new and very interesting problems in different branches of mathematicks</i> . London. Printed for J. Nourse, opposite Catherine-Street in the Strand. MDCCL. (Recopilació dels títols dels capítols). .	62
Annex 3:	62
Hernández Alonso (1985); cap X.	64
Annex 4:	65
Simpson, Thomas (1750); Preface; p. VI.....	65
Annex 5:	66
Simpson, Thomas (1750); Part I; p. 150.	67
Annex 6:	68
Cerdà, Tomàs, <i>Tratado de Fluxiones</i> ; “Explicar la Naturaleza de las Fluxiones”. [RAH Cortes 9/02812].	69
Annex 7:	69
Simpson, Thomas (1750); Part I; p. 14-15.	70
Annex 8:	70
Cerdà, Tomàs, <i>Tratado de Fluxiones</i> ; “Cap. 6 : Explicase el método de tirar las tangentes a las curvas por medio de las fluxiones”. [RAH Cortes 9/02792].	71
Annex 9:	72
Simpson, Thomas (1750); Part I; p. 51-53.	74

Annex 1 :

La traduccion española, del profesor Castresana, logra superar las dificultades que ofrece el texto latino, por las tachaduras, mal estado del documento y baja calidad de la fotocopia que le proporcionamos. Esta es la version española del borrador;

Al honorable don Thomas Simpson

Le saluda Thomas Cerda S.J.

He conocido claramente cuanto sobresales en Matematicas por tus libros publicados sobre esta materia, especialmente por el Tratado de Fluxiones por lo cual no he considerado nada mas util (....) que emplear tu ayuda y consejo para dirigir mi trabajo; te expondré brevemente de que se trata.

Desde que nuestro rey Don Fernando subio al Trono, su principal preocupacion fué, que nuestra juventud española estudiante de Matematicas se instruyese y para que esto se realizase mejor y para que no necesitásemos del Magisterio de otros pueblos que raramente aprenden a la perfeccion nuestra lengua, se tomo la molestia de que fueran enviados al extranjero algunos españoles que debidamente formados en estas, despues las explicasen a la juventud en la Academia oficial.

En esa época yo era profesor de Filosofia en la Academia Cerveriense, levantada hacia poco por Felipe V, y aun cuando yo estaba poco formado en Matematicas, este tenia otra opinion sobre estas.

Fui seleccionado entre estos para ir a la Galia con esta mira alli estuve varios años de observacion; por fin regrese a mi Barcelona (España), donde fui prefecto en el Instituto de Matematicas fundado por Fernando, incrementado por los ingresos anuales. Mi mision aqui es instruir a los jovenes mas nobles en esta clase de Ciencias. Mas, debiendo preparar tratados de Matematicas y oficialmente y se me pidió a mi esta tarea, explique durante algunos años los autores galos, pero, como sinceramente reconozco, algunos ingleses, (sobre todo tus obras), Mac Laurin, Ward, Martin, Desaguliers, Newton, Saunderson, y sobre todo tus obras, la Geometria, Algebra y las Fluxiones, las tengo entre manos, por lo cual y repensando con mas madurez el proposito, creí que seria preferible utilizar exclusivamente autores ingleses para preparar mi obra, como sinceramente lo confieso, te expondre como estoy impresionado sobre el hecho; me encanta la claridad de metodo de estos y su nitido estilo.

Ahora se encarga a la imprenta, en dos volumenés, la Aritmética y Algebra, para dar unidad a la cual consulté tu Algebra, a Mac Laurin, Saunderson, Ward y la Aritmética de Martin. Organisé ya la Geometría y Trigonometría prestándome la mayor luz la Geometría y Trigonometría de Martin, Ward y algunos otros autores galos; ahora dispongo el tratado de las Fluxiones; en esto te sigo a ti como guía y maestro y como sinceramente reconozco y aunque lea a otros autores, italianos y alemanes que disertan sobre cálculo diferencial e integral, sin embargo todo mi pensamiento está puesto en emularte en la claridad de tu método y me consideraría feliz si (al escribir) mi tratado sobre Fluxiones, este mereciese ser llamado no mío sino tuyo, sobre todo por su doctrina; estoy completamente persuadido que en tan nueva como dispuesta con la debida claridad....deben lamentarse las cosas adecuadas.

Ahora dire una palabra sobre mi Mecánica, sobre las restantes partes de la Matemáticahabía que (aprender?). Pero siendo opinión mía preferente que los ingleses en (esto) instruyen a mis alumnos con los mejores elementos y que sus inspiraciones trascienden a los mejores autores tanto en las reuniones amistosas como en las oficiales, consideraré que debían buscarse estos autores, no de otra nación sino de Inglaterra, por lo cual convirtiéndote por tus libros en el más versado y mejor para seleccionar estos autores que me servirían de guía para preparar esos elementos de Mecánica, Estática, Hidrostática, Óptica, Astronomía, Navegación, Arquitectura, consideraré valiosísimo pedirte la selección de esos libros esperando sin duda que por la amistad de ambos pueblos no te será ingrato el hacer la selección de esos nombres de los autores de manera que a esos mismos - y otros que se encuentren de entre los que instruyen a la juventud anglicana en la Academia- pueda yo (adoptar) la forma, la forma y el método de enseñar de tan esclarecidos varones.

He dispuesto al comerciante italiano Ignacio Cugnoni (que se queda en el pueblecito de Bishop Gate) para comprar los libros y se ocupe de enviármelos.

Pero desde luego espero que al cabo de los años tenga a mi disposición los mejores autores ingleses en Matemáticas y Física pues tengo designados los ingresos anuales.

Aunque hasta el momento ningún mérito tengo para contigo es - pero de ti este gratísimo favor.

Barcelona día tres de Junio de 1758.

(Academia de la Historia, Colección Cortes, legajo 2792)

Cerdà, Tomàs (1758), *Esborrany de carta a Thomas Simpson*. [RAH Cortes 9/02792. Traducció al castellà de la carta original pel professor Castressana que es troba a Hernández Alonso (1985); cap VII.

Annex 2

PART the First

Section I : Of the Nature, and Investigation, of Fluxions. (pàg 1)

Section II : Of the Application of Fluxions to the Solution of problems DE MAXIMIS ET MINIMIS. (pàg 14)

Section III : The Use of Fluxions in drawing Tangents to Curves. (pàg 51)

Section IV : Of the Use of Fluxions in determining the Points of Retrogression, or contrary Flexure in Curves. (pàg 65)

Section V : The Use of Fluxions in determining the Radii of Curvature, and the Evolutes of Curves. (pàg 71)

Section VI : Of the Inverse Method, or the Manner of determining the Fluents of given Fluxions. (pàg 84)

Section VII : Of the Use of Fluxions in finding the Areas of Curves. (pàg 121)

Section VIII : The Use of Fluxions in the Rectification, or finding the Lengths, of Curves. (pàg 156)

Section IX : The Application of Fluxions in investigating the Contents of Solids. (pàg 171)

Section X : The Use of Fluxions in finding the Superficies of Solid Bodies. (pàg 187)

Section XI : Of the Use of Fluxions in finding the Centers of Gravity, Percussion, and Oscillation of Bodies. (pàg 202)

Section XII : Of the Use of Fluxions in determining the Motion of Bodies affected by centripetal Forces. (pàg 228)

PART the Second

Section I : The Manner of investigating the Fluxions of Exponentials, with Those of the Sides and Angles of Spherical Triangles. (pàg 275)

Section II : Of the resolution of fluxional Equations, or the Manner of finding the Relation of the flowing Quantities from that of the Fluxions. (pàg 288)

Section III : Of the Comparison of Fluents, or the Manner of finding one Fluent from another. (pàg 305)

Section IV : Of the Transformation of Fluxions. (pàg 331)

Section V : The Investigation of Fluents of rational Fractions, of several Dimensions, according to the Forms in Cotes's HARMONIA MENSARUM. (pàg 347)

Section VI: The Manner of investigating Fluents, when Quantities, and their Logarithms Arcs and their Sines, &c. are involved together: With other Cases of the like Nature. (pàg 388)

Section VII : Showing how Fluents, found by Means of Infinite Serieses, are made to converge. (pàg 396)

Section VIII : The Use of Fluxions in determining the Motion of Bodies in resisting Mediums. (pàg 420)

Section IX : The Use of Fluxions in determining the Attraction of Bodies under different Forms. (pàg 445)

Section X : Of the Application of Fluxions to the Resolution of such Kinds of Problems DE MAXIMIS ET MINIMIS, as depend upon a particular Curve, whose Nature is to be determined. (pàg 480)

Section XI : The Resolution of Problems of various Kinds. (pàg 499)

Simpson, Thomas (1750), *The Doctrine and Application of fluxions. Containing (Besides what is common on the subject) a number of new improvements in the theory and the solution of a variety of new and very interesting problems in different branches of mathematicks.* London. Printed for J. Nourse, opposite Catherine-Street in the Strand. MDCCL. (Recopilació dels títols dels capítols).

Annex 3:

Indice de la Primera parte de la obra "Tratado de Fluxiones de Thomas Cerdá.

Cap.1 - Explicase la Naturaleza de las Fluxiones ...	Folio 1
Cap.2 - Algunos problemas para encontrar las Fluxiones de las Quantidades Algebraicas.....	" 5
Cap.3 - Reglas unicas para encontrar las Fluxiones de las Quantidades Algebraicas.....	" 12
Cap.4 - De las Fluxiones Superiores	" 16
Cap.5 - Resuelvense por las Fluxiones algunos Problemas de Maximos y Minimos.	" 23
Cap.6 - Explicase el Methodo de tirar las Tangentes a las Curvas por medio de Fluxiones.....	" 31
Cap.7 - Como se encuentran los puntos de Inflexion..	" 38
Cap.8 - Determinanse por el Methodo Directo de las Fluxiones los Radios de Curvatura y las Evolutas de las Curvas.	" 42
Cap.9 - Explicase el Methodo Inverso de las Fluxiones y algunas de sus reglas.	" 49
Cap.10 Como se haia de corregir la Fluente encontrada por el Methodo Inverso de las Flux....	" 54
Cap.11 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para la Quadratura de las Curvas.	" 59
Cap.12 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para la rectificacion de Curvas.	" 72
Cap.13 Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones par encontrar lo Solido de los Cuerpos.	" 80
Cap. Aplicacion del Methodo Inverso de las Fluxiones para encontrar la Superficie de los Cuerpos.	" 85

Cap.	De la resolucion de las Equaciones Fluxionales ó modo de encontrar la Relacion de / las Quantidades Fluientes por las de las / Fluxiones.	"	90
Cap.	De las Fluxiones de los Lados y Angulos de los Triangulos Esphericos.	"	106
Cap.	De las Fluxiones de Quantidades Exponenciales. (1)	"	119
Cap.	De la Transformacion de las Fluxiones.....	"	121
Cap.	Del uso de las series infinitas para encontrar las Fluientes.	"	131
Apend.	Adiciones al "Tratado de Fluxiones". De / Maximis et Minimis"		

Indice de la Segunda Parte del "Tratado de Fluxiones" de Cerdá.

Cap.	De la Comparacion de las Fluientes o Methodo para encontrar una Fluente dada otra.	Folio	1
Cap.	De las Fluientes de Fracciones Racionales de diferentes dimensiones, segun las Formulas de la Harmonia Mensurarum de Cotes.	"	25
Cap.	Methodos para investigar las Fluientes, quando las Quantidades y sus Logaritmos, los Arcos y sus Senos & se encuentran entre si multiplicados ó ocurren otros casos.	"	58
Cap.	De que suerte las Fluientes encontradas por Series Infinitas se pueden hazer convergentes.	"	66
Cap.	De la aplicacion de las Fluxiones a la resolucion de varias especies de Problemas / de Maximos y Minimos que dependen de una / particular Curva.	"	90
Cap.	Resolucion de varios Problemas de diferente especie.	"	109

El indice que damos, para la Primera Parte, coincide en los 13 capítulos numerados y titulados con los propuestos por Cerdá. Hasta pudiera ser que esos 13 capítulos y el primero sin numerar, junto con las "adiciones" formasen un primer volumen. El resto, con la segunda parte tambien, compondrian un segundo / tomo, que sin duda resultaria de mas difícil lectura y comprension que el 1º. El estudio de este, da lugar al lector a familiarizarse con las derivadas e integrales, y con sus aplicaciones. Versado ya en esta materia se puede acometer, con exito, / la lectura del 2º.

Hernández Alonso (1985); cap X.

THE Notion and Explication *Here* given of the first Principles of Fluxions, are not essentially different from what they are in the above-mention'd Treatise, tho' expressed in other Terms. The Consideration of Time, which I have introduced into the General Definition, will, perhaps, be disliked by *Those* who would have Fluxions to be *meer Velocities*: But the Advantage of considering them *otherwise* (not as the Velocities *Themselves*, but the Magnitudes *They* would, uniformly, generate in a given finite Time) appear to me sufficient to obviate any Objection on that Head.

By taking Fluxions as *meer Velocities*, the Imagination is confin'd, as it were, to a Point, and, without proper Care, insensibly involv'd in metaphysical Difficulties: But according to our

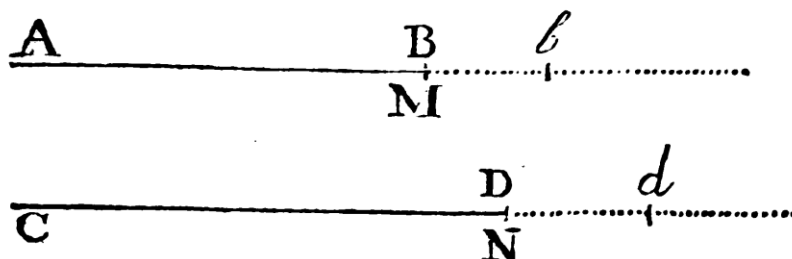
Simpson, Thomas (1750); Preface; p. VI.

SCHOLIUM.

134. At the Beginning of this, and in the preceding Sections, we have seen how the Fluxions of Quantities are determined, *by conceiving the generating Motion to become uniform at the proposed Position*; according to the true Definition of a Fluxion*: But hitherto no particular Notice has been taken of *the Method of Increments, or indefinitely little Parts*, used (and mistaken) by many for *that of Fluxions*: In which the Operations are, for the general Part, exactly the same; and which (tho' less accurate) may be apply'd to good Purpose in finding the Fluxions themselves, in many Cases. For which Reasons it may not be improper to add here a

a few Lines on that Head, to shew the Beginner how the two Methods differ from each other; especially as we shall be enabled, from thence, to draw out some Conclusions that will be of Use in the ensuing Part of the Work.

It hath been frequently inculcated in the foregoing Pages, that *the Fluxions of Quantities are always measured by how much the Quantities themselves would be uniformly augmented in a given Time*. Therefore, if two



Quantities or Lines, AB and CD be generated together, by the uniform (or equable) Motion of two Points B and D, it follows, that any two Spaces Bb and Dd *actually* gone over (whereby AB and CD are augmented) in the same time, will truly express the Fluxions of the generated Lines AB and CD: Whence it appears that the Increments (or Spaces actually gone over) and the Fluxions are the same in this Case, where the generating Velocities are equable.

But if, on the contrary, the Velocities of the two Points, in generating the Increments Mb and Nd , be supposed either to increase, or to decrease, the Lines or Increments so generated will, it is plain, no longer express the Fluxions of AB and CD ; being greater, or less than the Spaces that *might be uniformly* described, in the same Time, with the Velocities at M and N .

If, indeed, those Increments, and the Time of their Description, be taken so exceeding small that the Motion of the Points during that Time may be considered as equable, the Ratio of the said Increments will then express that of the Fluxions, or be as the Velocity at M to that at N , indefinitely near; but cannot be con-

L 4

ceived

ceived to be *strictly so*; unless, perhaps, in certain particular Cases.

Hence we see that the *Differential Method*, which proceeds upon these indefinitely little Increments (actually generated) as we do upon Fluxions (or the Spaces that *might be uniformly* generated) differs little, or nothing, from the Method of Fluxions, except in the Manner of Conception, and in Point of Accuracy, wherein it appears defective: And yet it is very certain the Conclusions this Way derived are *mathematically* true; which has afforded Matter of Wonder to *some*: But the Reason why they are so is very easily explained. For, although the *whole complete* Increment is actually understood by the Notation and first Definition (of this Method) yet in the Solution of Problems the exact Measure thereof is not taken, but only that Part of it which would arise from an uniform Increase, agreeable to the Notion of a Fluxion; which admits of a strict Demonstration: But, after all, the *Differential Method* has one Advantage above that of Fluxions, which is, we are not there obliged to introduce the Properties of Motion. Since we reason upon the Increments themselves, and not upon the Manner in which they may be generated.

Simpson, Thomas (1750); Part I; p. 150.

Cap. I

85

Explicar la Naturaleza de la Fluxión.

Para comprender perfectamente el Método de la Fluxión, se requiere presente, que todo Figura Geométrica se reduce a línea, Superficie, o a Sólido. Las líneas se conciben formadas por el Movimiento continuo de una línea, que describe, la Superficie por el Movimiento continuo de una línea, y el Sólido o Cuerpo por el Movimiento continuo de una Superficie, o Plano, aquella parte de línea, Superficie, o Sólido, que genera el línea, Superficie, o Sólido, se llama Figura generatriz. Si permanece constante, e invariable en la velocidad, que en algún punto o posición determinada, tiene es la que llamamos Fluxión en aquel punto de la Figura generatriz, que allí se forma, llamada por esto Fluxión.

Según es, que si el Movimiento al línea, Superficie, o Sólido, es uniforme, la Fluxión será constantemente la misma, o igual a la cantidad, que actualmente describe el línea, o Superficie generatriz. Pero si el Movimiento en realidad es o acelerado, o retardado, la Fluxión será menor, o mayor, que la cantidad con que actualmente se describe actualmente la Fluxión, porquela variación de celeridad, que interesa obediencia, ha de causar también una

*definición de líneas actualmente decursas respecto al
 que se describe si la velocidad permanece con-
 stantemente la misma, que en un punto, o porción
 lineal; y así si la velocidad es acelerada, la tra-
 zará con mayor, si retardada, la trazará
 con menor, que de líneas actualmente decursas
 en el punto, línea, o línea generatriz.*

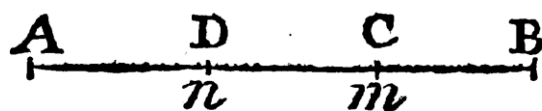
Cerdà, Tomàs, *Tratado de Fluxiones* ; “Explicar la Naturaleza de las Fluxiones”. [RAH Cortes 9/02812].

Annex 7:

GENERAL ILLUSTRATION.

Let a Point m move uniformly in a Right Line, from A towards B, and let another Point n move after it, with a Velocity either increasing, or decreasing, but so that it may, at a certain Position, D, become equal to that of the former Point m , moving uniformly.

This being premised, let the Motion of n be first considered as an increasing one ; in which Case the Distance of n behind m will continually



increase, 'till the two Points arrive at the cotemporary Positions C and D ; but afterwards it will, again, decrease ; for the Motion of n , 'till then, being slower than at D, it is also slower than that of the preceding Point

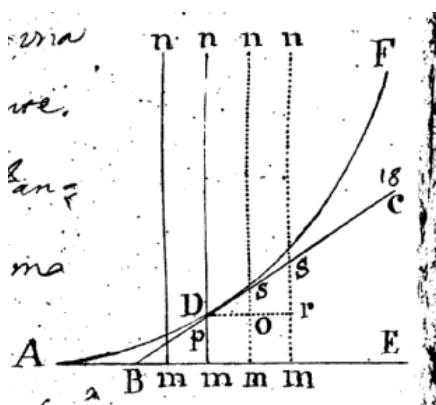
n (by Hypothesis) but becoming quicker, afterwards, than that of m , the Distance mn (as has been already said) will again decrease: And therefore is a *Maximum*, or the greatest of all, when the Celerities of the two Points are equal to each other.

But, if n arrives at D with a decreasing Celerity; then its Motion being first swifter, and afterwards slower, than that of m , the Distance mn will first decrease and then increase; and therefore is a *Minimum*, or the least of all, in the forementioned Circumstance.

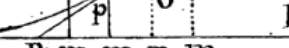
Since then the Distance mn is a *Maximum* or a *Minimum*, when the Velocities of m and n are equal, or when that Distance increases as fast through the Motion of m , as it decreases by that of n , its Fluxion at that Instant is evidently equal to Nothing * . * Art. 2. Therefore, as the Motion of the Points m and n may and 5. be conceived such that their Distance mn may express the Measure of any variable Quantity whatever, it follows, that the Fluxion of any variable Quantity whatever, when a Maximum or Minimum, is equal to Nothing.

Simpson, Thomas (1750); Part I; p. 14-15.

Annex 8:

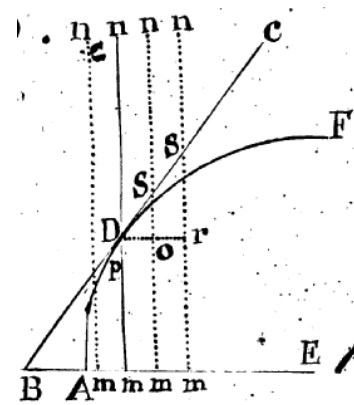


Sea pues ADF (fig 1) una curva cualquiera (cuyas ordenadas sean paralelas entre sí) a quien se le quiera tirar una tangente en el punto dado D y concíbese la línea mn que pasa de A hacia a E paralelamente a sí misma, pero de suerte que el punto p moviéndose en ella será describiendo la línea curva ADF.


 Expresé mm, o su igual y paralela Dr, la fluxión de Am, o lo que es lo mismo, la velocidad con que la línea mn se mueve a lo largo de AE y rS sea la fluxión de mp estando en la posición mDn, o la velocidad al punto p a lo largo de la línea mn, tírese la recta SB, que encuentre al eje AE en B. Ahora pues si el movimiento del punto p fuese uniforme por lo largo de la línea mn cuando la línea mDn se encontrase en la posición mSn p se

encontraría en S por ser Dr y rS las distancias que en el mismo tiempo describiera el punto p ya a lo largo de AE ya a lo largo de mn.

Si la línea mDn se concibe en otra posición mOn permaneciendo el punto p en su movimiento uniforme, los espacios DO, OS descritos en un mismo tiempo serian proporcionales a Dr, rS de suerte que siendo uniforme el



movimiento de p a lo largo de la línea movable mn el punto describiría necesariamente una línea recta. Luego para que el punto p describa efectivamente una curva, su movimiento a lo largo de la línea mn se debe concebir o bien acelerado o bien retardado.

Si este movimiento sobredicho se concibe acelerado, el espacio realmente descrito en un tiempo dado será mayor que el que se describiría con el movimiento uniforme, luego si con el movimiento uniforme el punto p siempre se encontrará en la recta BC, con el acelerado describirá una línea que caiga en la parte superior de BC como en la figura () y con el retardado describirá una curva que siempre caiga en la parte inferior de BC como en la figura () pero en entrambos casos BDC es una tangente a la curva en el punto D.

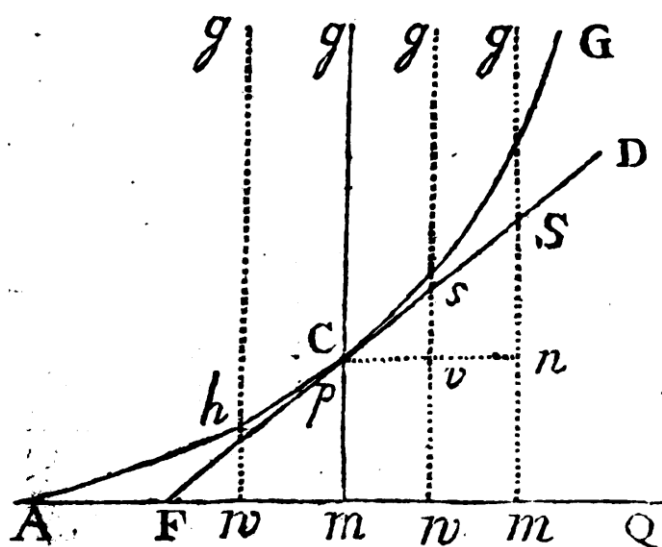
Cerdà, Tomàs, *Tratado de Fluxiones* ; “Cap. 6 : Explicase el método de tirar las tangentes a las curvas por medio de las fluxiones”. [RAH Cortes 9/02792].

SECTION III.

The Use of FLUXIONS in drawing Tangents to Curves.

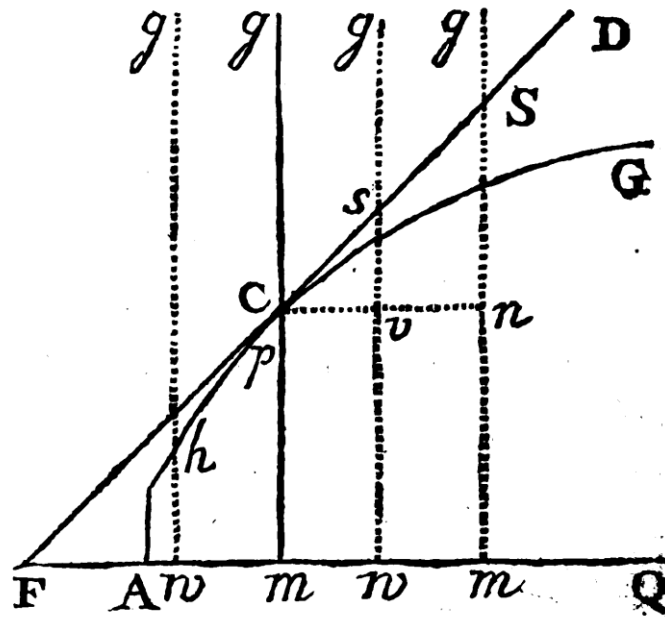
ILLUSTRATION.

48. **L**ET ACG be a Curve of any kind, and C the given Point from whence the Tangent is to be drawn.



Conceive a Right-line mg to be carried along uniformly, parallel to itself, from A towards Q , and let, at the same time, a Point p so move in that Line, as to describe, or trace out, the given Curve ACG : Also let mm , or Cn (equal and parallel to mm) express the Fluxion of Am , or the Celerity wherewith the Line mg is carried; and let nS express the corresponding Fluxion of mp , in the Position mCg , or the Celerity of the Point p , in the Line mg . Moreover, through the Point C let the Right-line SF be drawn, meeting the Axis of the Curve (AQ) in F .

And, if wsg be assumed to represent any other Position of that Line, and s the contemporary Position of the Point p (still supposing an equable Celerity of p) ; then the Distances Cv and vs , gone over, in the same



Now, seeing the Motion of p , in the Description of Curves, must, either, be an accelerated or a retarded one, let it be, first, considered as an accelerated one: In which Case the Arch CG will fall, *wholly*, above the Right-line CD (as in Fig. 1.) because the Distance

of the Point p from the Axis AQ , at the End of any given Time, is greater than it would be if the Acceleration was to cease at C ; and, if the Acceleration had ceased at C , the Point p would (it is proved) have been always found in the said Right-line FS .

But if the Motion of the Point p be a retarded one, it will appear, by reasoning in the same manner, that the Arch CG will fall wholly below the Right-line CD (as in Fig. 2.)

This being the Case, let the Line mg , and the Point p , along that Line, be now supposed to move back again, towards A and m , in the same manner they proceeded from thence: Then, since the Celerity of p (Fig. 1.) did before increase, it must now, on the contrary, decrease; and, therefore, as p , at the End of a given Time, after repassing the Point C , is not so near to AQ , as it would have been, had the Velocity continued the same as at C , the Arch Ch (as well as CG) must fall wholly above the Right-line FCD . And, by the same Method of arguing, the Arch Ch , in the second Case, will fall, wholly, below FCD : Therefore FCD , in both Cases, is a Tangent to the Curve at the Point C : Whence, the Triangles FmC and CnS being similar, it appears, that the Sub-tangent mF is always a Fourth-proportional to (nS) the Fluxion of the ordinate (Cn), the Fluxion of the Abscissa, and the Ordinate (Cm).

Simpson, Thomas (1750); Part I; p. 51-53.